Maciej Grzesiak

Metody oceny inwestycji

1. Rynek finansowy

W ekonomii rynek jest rozumiany jako ogół warunków, w których dochodzi do zawierania transakcji między sprzedawcami i nabywcami. W tym sensie będziemy też rozumieć termin *rynek finansowy.* Towarami na tym rynku są *instrumenty finansowe*, czyli umowy między dwiema stronami, regulujące zależności w jakich obie strony pozostają. W zależności od interesującego nas aspektu rynku można wyróżnić jego rozmaite segmenty. I tak, ze względu na charakter instrumentów finansowych wyróżnia się:
— rynek pieniężny (*money market*), na którym obraca się bonami skarbowymi, certyfikatami depozytowymi, czekami, wekslami, tj. instrumentami będącymi w pewnym sensie surogatami pieniądza;
— rynek kapitałowy (*capital market*), na którym handluje się akcjami i obligacjami;
— rynek walutowy (*foreign exchange (FX) market*), obejmujący handel walutami, czy też interwencje banków centralnych w celu utrzymania na określonym kursie własnej waluty;
— rynek instrumentów pochodnych (*derivatives market*), obejmujący kontrakty *futures*, opcje, i inne.

Ze względu na horyzont czasowy poszczególnych instrumentów finansowych wyróżnia się:
— rynek gotówkowy (kasowy) (*spot market, cash market*), na którym wymiana towarów następuje zaraz (do kilku dni) po zawarciu transakcji;
— rynek terminowy (*futures market*), na którym od zawarcia transakcji do dostarczenia towaru może minąć wiele miesięcy, a nawet lat.

Ze względu na formę sprzedaży wyróżnia się:
— rynek pierwotny (*primary market*), na którym emitenci nowych instrumentów (np. akcji czy obligacji) sprzedają je za pośrednictwem instytucji finansowych;
— rynek wtórny (*secondary market*), na którym handluje się instrumentami już rozprowadzonymi na rynku pierwotnym.

Uczestników rynku dzielimy na dwa typy: indywidualnych i instytucjonalnych. Tych ostatnich dzielimy z kolei na:
— banki;
— fundusze emerytalne;
— fundusze powiernicze (otwarte i zamknięte).

Uczestników rynku nie należy mylić z osobami obsługującymi (maklerami, brokerami) i instytucjami obsługującymi (domami maklerskimi).

2. Analiza inwestycji

Potocznie, inwestycja to wydatek (jednorazowy lub w pewnych odstępach czasu) po którym oczekujemy w przyszłości dochodu.

Nieco bardziej precyzyjnie, *inwestycję finansową* określamy jako ciąg płatności występujących w znanych momentach czasu i znanych wielkościach. Płatność ujemna to nakład inwestora, a dodatnia – jego dochód. Moment pierwszej płatności (z założenia jest to nakład) jest początkiem okresu inwestycyjnego.

Przyjmujemy oznaczenia:
— $n+1$ – liczba wszystkich płatności;
— t_j – moment wystąpienia j-tej płatności, $j = 0, 1, \ldots, n$, przy czym $t_0 = 0$;
— C_j – płatność w momencie t_j.
Zatem inwestycja finansowa to ciąg płatności $C_0, C_1, \ldots, C_n$ o własnościach: $C_0 < 0$, $C_n \neq 0$ i $C_j > 0$ przynajmniej dla jednego j.
Opłacalność inwestycji można oceniać różnymi metodami, wśród których można wyróżnić *metody statyczne* i *dynamiczne.* Te pierwsze nie uwzględniają zmiennej wartości pieniądza w czasie, i dlatego stosuje się je we wstępnej fazie analizy inwestycji. Wspomnijmy o trzech z nich:
— obliczanie okresu zwrotu inwestycji;
— obliczanie księgowej stopy zwrotu;
— obliczanie progu rentowności.
Przez *okres zwrotu inwestycji* rozumiemy czas, po którym wpływy zrównoważą wydatki. Jeżeli np. przedsiębiorstwo inwestuje w urządzenie 6000 zł, i oczekuje, że przez 5 kolejnych lat będzie uzyskiwać z jego eksploatacji nadwyżkę 2000 zł, to okres zwrotu inwestycji wynosi tutaj 3 lata.
Przypuśćmy, że alternatywna inwestycja to wydatek 8000 zł, a korzyści z niej wyniosą w kolejnych latach 1000, 1500, 2500, 3000, 2000 ,4000, 4000, 2000. Okres zwrotu wynosi teraz 4 lata, więc gdyby kierować się nim, należałoby wybrać inwestycję pierwszą. Jednak widać, że wybór nie jest oczywisty, bo druga inwestycja zapewnia te same wpływy w ciągu 5. lat, i jeszcze potem przez 3 lata.
Księgowa stopa zwrotu jest stosunkiem przeciętnego zysku netto osiąganego w rozpatrywanym okresie do wielkości nakładu. Dla inwestycji rozpatrywanych wyżej odpowiednie stopy wynoszą:

$$r_1 = \frac{10000}{5 \cdot 6000} = 33,33\% \qquad r_2 = \frac{20000}{8 \cdot 8000} = 31,25\%.$$

A więc mamy drugie wskazanie na inwestycję pierwszą.
Wreszcie *próg rentowności* to wielkość produkcji, przy której przychody ze sprzedaży są równe poniesionym kosztom. Wielkość tę można wyrazić ilościowo (liczba produktów) lub wartościowo (wartość produktów).
Do metod dynamicznych zaliczamy:
— metodę teraźniejszej wartości netto;
— metodę wewnętrznej stopy zwrotu;
— metodę zmodyfikowanej wewnętrznej stopy zwrotu.
Przyjmijmy, że początkową kwotą inwestowaną jest I_0, a na koniec roku t otrzymujemy dochód C_t (który może być ujemny). Podstawowym miernikiem opłacalności inwestycji jest *wartość bieżąca netto* (*net present value, NPV*):

$$NPV = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t} - I_0. \tag{1}$$

Aby inwestycja miała sens, NPV musi być dodatnia.
Wzór ten można stosować również wtedy, gdy okres otrzymywania dochodów jest inny niż rok. Należy tylko pamiętać o uzgodnieniu stopy procentowej z okresem otrzymywania dochodów.
Przykład. Zainwestowane 100 jp. przyniosło następujące dochody w ciągu 3. lat: 30, 40, 70. Stopa procentowa wynosi 0,1. Obliczamy:

$$NPV = \frac{30}{1,1} + \frac{40}{1,1^2} + \frac{70}{1,1^3} - 100 = 12,92.$$

Zatem inwestycja była opłacalna.
Jeżeli porównujemy kilka alternatywnych inwestycji, to oczywiście z góry odrzucamy te, których NPV jest ujemna. Ale wartość NPV zależy od przyjętej stopy procentowej

r. Z określenia (1) wynika, że jest to funkcja ciągła i różniczkowalna zmiennej r. Jej przebieg zmienności zależy od ciągu płatności C_j.

Twierdzenie 1. *Jeżeli $C_j \geqslant 0$ dla $j = 1, 2, \ldots$, to $NPV(r)$ jest funkcją malejącą i wypukłą dla $r > -1$ (w praktyce jest oczywiście $r > 0$).*

Aby się o tym przekonać wystarczy obliczyć pochodne:

$$\frac{d}{dr}\left((1+r)^{-t}\right) = -t(1+r)^{-t-1} < 0,$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\left((1+r)^{-t}\right) = t(t+1)(1+r)^{-t-2} > 0.$$

Jeśli jednak w czasie inwestycji pojawiają się dochody ujemne ($C_j < 0$), tzn oprócz nakładu początkowego I_0 musimy ponosić nakłady w czasie trwania inwestycji, to NPV nie musi już być monotoniczna. W szczególności może mieć kilka miejsc zerowych. Trafność oceny inwestycji jest więc mocno uwarunkowana prawidłowością wyboru stopy procentowej. Jeśli spełnione są założenia twierdzenia 1, to przyjęcie zbyt niskiej stopy spowoduje, że inwestycja zostanie przeceniona, a zbyt dużej stopy — niedocenienie inwestycji.

Pewną trudnością przy posługiwaniu się NPV jako miarą wartości inwestycji jest jej liniowa zależność od skali inwestycji, tzn. jeśli w zbiorze inwestycji (tj. ciągów płatności) wprowdzimy w naturalny sposób dodawanie i mnożenie, to NPV będzie funkcjonałem liniowym.

Jak widać, aby dokonać właściwego wyboru potrzebne są bardziej precyzyjne miary dochodu.

Stopą zwrotu (*rate of return, RR*) z inwestycji nazywamy liczbę

$$R = \left(\frac{FV}{PV}\right)^{\frac{1}{n}} - 1,$$

gdzie n jest długością okresu inwestowania. To znaczy, że inwestując PV przy stopie R na n lat otrzymamy FV (przy założeniu rocznej kapitalizacji).

Przykład. Zainwestowana suma 100 zł przyniosła po 5 latach dochód 240 zł. Zatem:

$$R = \left(\frac{240}{100}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 19,14\%.$$

Wewnętrzną stopą zwrotu (*internal rate of return, IRR*) z inwestycji jest taka wartość stopy, przy której $NPV = 0$. Zatem IRR jest rozwiązaniem równania

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+IRR)^i} = I_0. \qquad (2)$$

Przykład. Dokonano inwestycji w wysokości 100 zł, która przyniosła dochody (na koniec kolejnych 3 lat): 30, 60, 70. Wtedy:

$$\frac{30}{(1+r)} + \frac{60}{(1+r)^2} + \frac{70}{(1+r)^3} = 100,$$

skąd $r = 23,96\%$.

Poza najprostszymi przypadkami równanie (2) nie daje się rozwiązać w sposób analityczny. Ponadto, jak już zauważyliśmy, to równanie może mieć więcej niż jeden pierwiastek rzeczywisty. NPV jest bowiem funkcją wymierną stopy procentowej r; jeśli np. równanie $NPV(r) = 0$ ma dwa pierwiastki dodatnie r_1, r_2, to znaczy to, że dla $r < r_1$ NPV jest ujemne i rośnie, osiąga 0 dla $r = r_1$, rośnie do pewnego maksimum i zaczyna maleć, osiągając znowu 0 dla $r = r_2$. Dla $r > r_2$ jest ujemne.

Najprostszy przypadek to taki, w którym mamy pojedynczy nakład i pojedynczy dochód. Wtedy IRR jest miarą rentowności (przypomnijmy, że rentowność mierzy stosunek zysku do nakładów). Natomiast przy pojedynczym nakładzie i wielu dochodach osiągnięcie wyliczonej IRR wymaga reinwestowania dochodów po tej samej stopie procentowej, co praktycznie jest trudne (jeśli nie niewykonalne). Do tego problemu wrócimy. Na razie jednak rozważmy podstawowy problem: jakie są warunki istnienia IRR? Jeśli w równaniu (2) podstawimy $x^{-1} = 1 + IRR$, to otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{n} C_i x^i = I_0,$$

czyli

$$\sum_{i=1}^{n} C_i x^i - I_0 = 0. \tag{3}$$

Liczbę dodatnich pierwiastków tego równania można oszacować przy pomocy następującego twierdzenia (tzw. reguła Kartezjusza).

Twierdzenie 2. *Liczba dodatnich zer wielomianu $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ jest równa liczbie zmian znaku w ciągu współczynników $a_0, a_1, \ldots, a_n$ lub jest od tej liczby mniejsza o liczbę parzystą.*

Np. wielomian $2 - 3x - 3x^2 + x^3 - 5x^4$ ma 1 lub 3 pierwiastki dodatnie.
D o w ó d. Niech $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Wielomian ten można przedstawić w postaci

$$f(x) = a_n\big[(x^2 + p_1 x + q_1)\cdots(x^2 + p_k x + q_k)(x + u_1)\cdots(x + u_l)\big](x - t_1)\cdots(x - t_m),$$

gdzie wielomian w nawiasie kwadratowym składa się z czynników nierozkładalnych stopnia 2 i czynników $x+u_j$ odpowiadających pierwiastkom ujemnym. Zatem $q_1, \ldots, q_k$, $u_1 \ldots, u_l$ są dodatnie. Wynika stąd, że wielomian w nawiasie kwadratowym ma pierwszy i ostatni współczynnik tego samego znaku, więc liczba zmian znaku w ciągu jego współczynników jest parzysta. Gdy ten wielomian mnożymy kolejno przez $x - t_1, \ldots, x - t_m$, to przy każdym kolejnym mnożeniu liczba zmian znaku wzrasta o liczbę nieparzystą.[1]
W szczególności, jeśli w równaniu (3) mamy $I_0 > 0$, $C_i > 0$, to ma ono dokładnie jeden pierwiastek dodatni. Nieco ogólniej, mamy następujący wniosek.

Wniosek 1. *Warunkiem dostatecznym na to aby istniało rozwiązanie $x_0 \in (0,1)$ równania (3) jest spełnienie nierówności*

$$I_0 < \sum_{i=1}^{n} C_i. \tag{4}$$

D o w ó d. Nierówność zapiszemy w postaci:

$$I_0 - \sum_{C_j<0} C_j < \sum_{C_k>0} C_k,$$

i określimy funkcje

$$f(x) = I_0 - \sum_{C_j<0} C_j x^j, \quad g(x) = \sum_{C_k>0} C_k x^k.$$

[1] Korzystamy z następującego, nie całkiem oczywistego lematu:

Lemat 1. *Jeżeli wielomian $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ pomnożymy przez $x - t$, gdzie $t > 0$, to liczba zmian znaku w ciągu współczynników wielomianu $f(x)$ zwiększa się o liczbę nieparzystą.*

Wtedy $f(0) = I_0 > 0 = g(0)$ oraz $f(1) < g(1)$. Zatem wykresy funkcji muszą się przeciąć, a więc istnieje $x_0 \in (0,1)$ takie, że $f(x_0) = g(x_0)$, czyli równanie (3) ma rozwiązanie.
Podane wyżej uwagi prowadzą do wniosku, że należy ostrożnie korzystać z narzędzi, jakie udostępniają arkusze kalkulacyjne (np. z funkcji IRR w Excelu). Wynik jaki otrzymamy będzie bliższy zadanej wartości przypuszczanej, i nie będzie możliwości sprawdzenia czy jest on jedyny.
Przykład. Niech inwestycja będzie ciągiem $(-1000, 3450, -3965, 1518)$. Zatem IRR obliczamy z równości

$$-1000 + \frac{3450}{1+i} - \frac{3965}{(1+i)^2} + \frac{1518}{(1+i)^3} = 0.$$

To równanie ma rozwiązania $i_1 = 0,1$, $i_2 = 0,15$, $i_3 = 0,2$. Wewnętrzna stopa zwrotu nie jest określona jednoznacznie.
Załóżmy teraz, że dla inwestycji o pojedynczym nakładzie I_0 dochody uzyskiwane w czasie realizacji inwestycji są reinwestowane przy zastosowaniu stopy r (innej niż IRR). Wtedy stopa zwrotu będzie różna od IRR. Nazwiemy ją *zewnętrzną stopą zwrotu* (*external rate of return, ERR*).
Z określenia mamy:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(1+r)^{n-i} = I_0(1+ERR)^n,$$

zatem

$$ERR = \left(\frac{1}{I_0}\sum_{i=1}^{n} C_i(1+r)^{n-i}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Przykład. Niech $I_0 = 100$, $C_1 = 30$, $C_2 = 60$, $C_3 = 70$. Wtedy $IRR = 23,96\%$. Załóżmy jednak, że dochody C_1 i C_2 są reinwestowane przy zastosowaniu stopy $r = 20\%$. Wtedy $ERR = 22,8\%$, a więc $ERR < IRR$. Gdyby stopa reinwestowania była korzystniejsza, np. 25%, to $ERR = 24,26\% > IRR$.
Obliczanie ERR opiera się na założeniu stałej stopy reinwestowania. Jeżeli uwzględnimy możliwość, że w kolejnych latach mamy różne stopy reinwestowania $r_2, r_3, \ldots$, to otrzymamy tzw. *składaną stopę zwrotu* (*compound rate of return, CRR*). Z określenia mamy:

$$\begin{aligned} CRR &= ((\frac{1}{I_0}C_1(1+r_2)(1+r_3)\ldots(1+r_n) + \\ &+ C_2(1+r_3)\ldots(1+r_n) + \cdots + C_{n-1}(1+r_n) + C_n))^{\frac{1}{n}} - 1. \end{aligned}$$

Przykład. Niech (jak w poprzednim przykładzie) $I_0 = 100$, $C_1 = 30$, $C_2 = 60$, $C_3 = 70$, ale załóżmy, że $r_2 = 20\%$, $r_3 = 25\%$. Wtedy

$$CRR = \left(\frac{1}{100}(30 \cdot 1,2 \cdot 1,25 + 60 \cdot 1,25 + 70)\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 23,86\%.$$

Jeśli nakład nie jest pojedynczy, tzn. w inwestycji występują ujemne wartości C_k, to pożytecznym wskaźnikiem jest *zmodyfikowana stopa zwrotu* ($MIRR$). Aby ją zdefiniować przyjmijmy, że kwoty które wpłacamy pozyskiwane są przy stopie r_f (np. jest to stopa kredytu bankowego), a kwoty uzyskiwane są reinwestowane przy stopie r_r (np. jest to stopa lokaty). Wtedy wartość obecna kosztów wynosi

$$I_0 - \sum_{C_j<0} C_j(1+r_f)^{-t_j},$$

a wartość przyszła przychodów to

$$\sum_{C_k>0} C_k(1+r_r)^{n-t_k}.$$

Stopę $MIRR$ definiujemy równością:

$$\Big(I_0 - \sum_{C_j<0} C_j(1+r_f)^{-t_j}\Big)(1+MIRR)^n = \sum_{C_k>0} C_k(1+r_r)^{n-t_k},$$

tzn.

$$MIRR = \Big(\frac{\sum_{C_k>0} C_k(1+r_r)^{n-t_k}}{I_0 - \sum_{C_j<0} C_j(1+r_f)^{-t_j}}\Big)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Funkcje IRR i $MIRR$ są dostępne w Excelu.
Przykład. Niech $I_0 = 2000$, $C_1 = -3000$, $C_2 = 4000$, $C_3 = 5000$, oraz $r_f = 15\%$, $r_r = 18\%$. Wtedy $MIRR$=28,24%. Dla porównania: IRR=35,08%.

2.1. Składniki stopy zwrotu

Stopa zwrotu może być traktowana jako forma nagrody, bo inwestor, wyrzekając się bieżących przyjemności dla przyszłych, z natury nie całkiem pewnych korzyści, oczekuje premii.
Stopa zwrotu jest sumą czterech składników: realnej stopy procentowej, stopy inflacji, premii płynności oraz premii za ryzyko.
Realna stopa procentowa jest to cena pieniądza w warunkach równowagi (gdy nie występuje inflacja, nie ma ryzyka i horyzont czasowy jest stały — np. 1 rok). Na rynku mianowicie występują podmioty dysponujące wolnymi środkami, a także podmioty poszukujące środków do sfinansowania swoich zamierzeń. Ci pierwsi to potencjalni kredytodawcy, ci drudzy to kredytobiorcy. Realna stopa procentowa jest w tej sytuacji ceną pieniądza na rynku. Zwiększony popyt na pieniądz powoduje wzrost realnej stopy procentowej, zaś zwiększona podaż — spadek realnej stopy procentowej.
Wprowadzimy teraz do rozważań inflację, mierzoną za pomocą stopy inflacji. Następujący wzór to tzw. *równanie Fishera*:

$$1 + r = (1 + r_r)(1 + r_i),$$

gdzie r jest nominalną stopą procentową, r_r jest realną stopą procentową, zaś r_i jest stopą inflacji. Zatem:

$$r = r_r + r_i + r_r r_i.$$

W rozwiniętej gospodarce r_r i r_i są niewielkie, a wtedy $r_i r_r$ jest bardzo małe i można ten składnik pominąć. Wtedy stopa realna r_r jest różnicą stopy nominalnej i stopy inflacji.
Oczywiście nie wszystkie inwestycje dokonywane są na ten sam okres. Gdy na rynku dostępne są instrumenty finansowe o różnych okresach wykupu, należy uwzględnić *premię płynności*. Instrumenty o dłuższych terminach wykupu mają na ogół wyższe stopy zwrotu niż instrumenty o krótszych terminach, co oznacza występowanie premii płynności.
Wymienione wyżej trzy składniki stanowią cenę czasu w inwestowaniu. Należy jeszcze uwzględnić cenę ryzyka — tzw. *premię za ryzyko*. Zatem:

$$r = r_r + r_i + r_{lp} + r_{rp},$$

gdzie indeksy lp i rp są skrótami od *liquidity premium* oraz *risk premium.*

3. Średni czas trwania

Średni czas trwania to pojęcie wprowadzone przez Macaulay'a[2] służące badaniu ryzyka inwestowania.

[2] Frederick Robertson Macaulay, 1882 – 1970

Definicja 1. *Niech dana będzie inwestycja określona ciągiem płatności* $C_0, C_1, \ldots, C_n$, *o pojedynczym nakładzie* $I_0 = -C_0$ *i niech* r^* *oznacza IRR tej inwestycji, tzn.*

$$I_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j (1 + r^*)^{-t_j}. \tag{5}$$

Średni czas trwania *(duration)* D *określamy jako*

$$D = \sum_{j=1}^{n} t_j \frac{C_j (1 + r^*)^{-t_j}}{I_0}. \tag{6}$$

Zatem średni czas trwania inwestycji to średnia ważona momentów występowania płatności w której wagami są zaktualizowane na moment $t = 0$ *udziały kolejnych płatności w wartości bieżącej inwestycji.*

Średni czas trwania jest liczbą dodatnią, mianowaną w jednostkach czasu (latach). Ponieważ suma wag wynosi 1, więc średni czas trwania jest kombinacją wypukłą momentów płatności, czyli jest pozycją środka ciężkości strumienia płatności (zaktualizowanych na moment $t = 0$) na osi czasu. Oznacza to, że suma wszystkich płatności poprzedzających średni czas trwania jest równa sumie wszystkich płatności następujących po nim. Jeszcze inaczej: jest to moment, w którym "połowa" inwestycji już się zwróciła.

Przykład. Rozważmy inwestycję określoną ciągiem płatności $C_0 = -5000$, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 1100$, $t_j = j$, $j = 0, 1, \ldots, 5$. IRR tej inwestycji (obliczone np. przy pomocy arkusza kalkulacyjnego) wynosi $3,26\%$. Zatem

$$D = \sum_{j=1}^{5} j \frac{1100(1 + 0,0326)^{-j}}{5000} = 2,94.$$

Gdyby, przy tym samym nakładzie 5000, płatności wynosiły 1200, to $IRR = 6,40\%$, a $D = 2,88$.

Średni czas trwania można interpretować również inaczej. Ponieważ nakład I_0 spełnia równość (5), więc można go traktować jako obecną cenę zakupu przyszłych dochodów $\{C_j\}$. Cena ta zależy od stopy procentowej r, a więc można ją traktować jak funkcję stopy procentowej r, czyli

$$I_0(r) = \sum_{j=1}^{n} C_j (1 + r)^{-t_j}.$$

Sens praktyczny można wyjaśnić przykładem. Jeżeli kredytobiorca wie, że za rok będzie w stanie spłacić dług w wysokości 1000 zł, i chciałby wziąć maksymalnie duży kredyt teraz, to kwota jaką uzyska jest zależna od stopy procentowej:

— przy stopie $r = 10\%$ uzyska $\frac{1000}{1,1} = 909,09$ zł;

— przy stopie $r = 20\%$ uzyska $\frac{1000}{1,2} = 833,33$ zł;

Z punktu widzenia banku jest to inwestycja zapewniająca dochód 1000 za rok.

Funkcja $I_0(r)$ jest ciągła i różniczkowalna dla $r > -1$ (rozpatrywanie jej dla innych r nie ma sensu). Pochodna wynosi

$$I_0'(r) = -\sum_{j=1}^{n} t_j C_j (1 + r)^{-t_j - 1}. \tag{7}$$

Stąd $\sum_{j=1}^{n} t_j C_j (1 + r)^{-t_j} = -I_0'(r)(1 + r)$, więc ze wzoru (6) otrzymujemy

$$-\frac{I_0'(r)}{I_0(r)}(1 + r) = D. \tag{8}$$

czyli

$$I_0'(r) \cdot (1+r) = -D \cdot I_0(r)$$

Mnożąc przez Δr otrzymujemy

$$I_0'(r)\Delta r \cdot (1+r) = -D \cdot I_0(r)\Delta r$$

Dla niewielkiej zmiany Δr stopy zwrotu zmiana wartości bieżącej inwestycji $\Delta I_0 = I_0(r+\Delta r) - I_0(r)$ jest w przybliżeniu równa różniczce

$$\Delta I_0 \approx I_0'(r)\Delta r,$$

a więc

$$\Delta I_0 \cdot (1+r) \approx -D \cdot I_0(r)\Delta r.$$

Przy niskich stopach procentowych można przyjąć $1+r \approx 1$, i wtedy

$$\frac{\Delta I_0}{I_0} \approx -D\Delta r.$$

Można to interpretować następująco:
Średni czas trwania wyraża przybliżony względny spadek ceny inwestycji, gdy stopa zwrotu wzrośnie o jeden punkt procentowy.
Przykład. Dla inwestycji z poprzedniego przykładu wyliczyliśmy $D = 2,94$, co oznacza, że gdy stopa zwrotu zmieni się z 3,26% na 4,26%, to cena inwestycji spadnie w przybliżeniu o 2,94%. W rzeczywistości jest: $I_0(3,26\%) = 5000,50$, $I_0(4,26\%) = 4861,44$, a więc względny spadek ceny wynosi $\left(1 - \frac{4861,44}{5000.50}\right) \cdot 100\% = 2,78\%$.
Jeszcze inną interpretację średniego czasu trwania uzyskamy traktując I_0 jako funkcję czynnika pomnażającego $1+r$: $I_0 = I_0(1+r)$. Ponieważ $I_0'(r) = I_0'(1+r)$, więc wzór (8) można zapisać w postaci:

$$-\frac{\frac{dI_0}{d(1+r)}}{\frac{I_0}{1+r}} = D.$$

A zatem:
Średni czas trwania wyraża elastyczność ceny inwestycji względem czynnika $1+r$.

Elastyczność funkcji. Załóżmy, że funkcja określona wzorem $y = f(x)$ jest funkcją określoną dla $x > 0$, nieujemną i różniczkowalną. Ilorazy $\frac{\Delta y}{y}$ i $\frac{\Delta x}{x}$ nazywamy odpowiednio względnym przyrostem wartości funkcji i względnym przyrostem argumentu x. Stosunek obu względnych przyrostów

$$E_{\Delta x} f = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

będziemy nazywać *elastycznością łukową funkcji.* Oczywiście wartość elastyczności łukowej zależy od punktu x, w którym liczony jest przyrost Δx. Granicę

$$E_x f = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{f(x)} f'(x)$$

nazywamy *elastycznością funkcji* f w punkcie x. Elastyczność funkcji określa w przybliżeniu procentową zmianę wartości funkcji f w x gdy argument wzrośnie o 1%.
Poniżej kilka rodzajów elastyczności najczęściej spotykanych w ekonomii.
Elastyczność kosztu całkowitego $K(x)$ produkcji jako funkcji wielkości produkcji: pokazuje o ile procent wzrośnie koszt całkowity, gdy produkcja wzrośnie o 1%.
Elastyczność produkcji jako funkcji nakładów: pokazuje jak wielkość produkcji reaguje na zmiany nakładów.
Elastyczność dochodowa konsumpcji: pokazuje o ile procent wzrośnie konsumpcja, gdy dochód rozporządzalny wzrośnie o 1%.
Popyt $D(p)$ jako funkcja ceny p jest zazwyczaj funkcją malejącą. Zatem możemy wywnioskować, że elastyczność cenowa popytu E_pD przyjmuje na ogół wartości ujemne.
Jeśli $|E_pD| < 1$ to mówimy, że popyt jest nieelastyczny, gdy $|E_pD| = 1$ to mówimy o popycie neutralnym, natomiast w przypadku $|E_pD| > 1$ popyt jest silnie elastyczny.
Odwrotność E_pD nazywa się współczynnikiem zmienności cenowej (giętkość ceny). Współczynnik ten podaje, jak cena reaguje na zmianę ilości towaru na rynku.

Można też rozważać podaż $S(p)$ jako funkcję ceny p. Zazwyczaj jest to funkcja rosnąca, a elastyczność cenowa podaży $E_pS > 0$.

Przykład. Niech $x = 1 + r$. Wtedy dla inwestycji z poprzedniego przykładu

$$I_0(x) = 1100 \sum_{j=1}^{5} x^{-j}, \qquad I_0'(x) = -1100 \sum_{j=1}^{5} jx^{-j-1},$$

więc

$$E_x I_0 = \frac{x}{1100 \sum_{j=1}^{5} x^{-j}} \cdot \big(- 1100 \sum_{j=1}^{5} jx^{-j-1} \big) = - \frac{\sum_{j=1}^{5} jx^{-j}}{\sum_{j=1}^{5} x^{-j}}.$$

Dla $x = 1,0326$ otrzymujemy -2,94. Zatem wzrost czynnika pomnażającego x o 1%, do wartości 1,0429, oznacza spadek ceny inwestycji o 2,94%.
Podsumowując, średni czas trwania wykorzystywany jest jako miara ryzyka stopy procentowej, głównie w odniesieniu do obligacji. Można podane interpretacje stosować także do innych instrumentów finansowych, ale musi być spełniony podstawowy warunek: stopa IRR musi być określona jednoznacznie.

4. Wycena instrumentów rynku pieniężnego

Dochody z inwestowania w instrumenty rynku finansowego (obligacje, bony skarbowe, akcje, certyfikaty depozytowe itd.) uzyskuje się w różnych momentach w przyszłości. Aby porównywać dochody uzyskiwane z różnych instrumentów, należy uwzględnić zmienną wartość pieniądza w czasie.
Wycena polega w zasadzie na przedstawieniu zależności między wartością instrumentu a jego stopą dochodu. Są tutaj dwa warianty:
— jeżeli znana jest stopa dochodu (tzn. inwestor szuka inwestycji zapewniającej mu określony dochód), to na jej podstawie określa cenę instrumentu, jaką jest w stanie zaakceptować;
— odwrotnie, jeżeli znana jest wartość instrumentu, to na jej podstawie można określić stopę dochodu.
Z punktu widzenia wyceny instrumentów finansowych wyróżniamy:
— instrumenty o podstawie dochodowej (np. certyfikaty depozytowe). Sprzedaje się je (z reguły) po cenie równej wartości nominalnej, a w momencie wykupu posiadacz otrzymuje wartość nominalną plus odsetki.
— instrumenty o podstawie dyskontowej (np. bony skarbowe). Sprzedaje się je z dyskontem, a w momencie wykupu otrzymuje się wartość nominalną.
Przyjmijmy oznaczenia:
— r — stopa dochodu instrumentu, czyli stopa rentowności;
— FV — wartość nominalna (*face value*);
— P — cena instrumentu (*price*);
— N_{im} — liczba dni między terminem emisji a terminem wykupu (*issue to maturity*);
— N_{sm} — liczba dni między terminem sprzedaży a terminem wykupu (*sell to maturity*) (gdy inwestor nie przetrzymuje instrumentu do terminu wykupu);
— N_{pm} — liczba dni między terminem nabycia a terminem wykupu (*purchase to maturity*).
Będziemy przyjmować, że liczba dni w roku wynosi 360. Mamy podstawową zależność:

$$\big(1 + r\frac{N_{pm}}{360}\big) \cdot P = \big(1 + i\frac{N_{im}}{360}\big) \cdot FV.$$

Jeżeli inwestor przetrzyma certyfikat depozytowy do terminu wykupu, to stopę rentowności r wyliczamy z równości

$$\Big(1 + r\frac{N_{pm}}{360}\Big)P = \Big(1 + i\frac{N_{im}}{360}\Big)FV,$$

gdzie i jest stopą oprocentowania certyfikatu. A więc wynosi ona:

$$r = \left[\frac{FV(1 + i\frac{N_{im}}{360})}{P} - 1\right]\frac{360}{N_{pm}}.$$

Przykład. Inwestor zakupił 13-tygodniowy certyfikat depozytowy, dla którego pozostało 20 dni do terminu wykupu. Cena zakupu 102, $FV = 100$, $i = 15\%$. Stąd:

$$r = \left[\frac{100(1 + 0,15\frac{91}{360})}{102} - 1\right]\frac{360}{20} = 18,32\%.$$

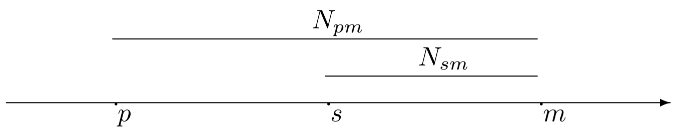
Jeżeli natomiast znana jest stopa r, to wartość certyfikatu wynosi:

$$P = \frac{FV(1 + i\frac{N_{im}}{360})}{1 + r\frac{N_{pm}}{360}}.$$

Przykład. Inwestor, którego wymagana stopa dochodu wynosi 18% chce zakupić 13-tygodniowy certyfikat depozytowy z 50-dniowym terminem wykupu. Wartość nominalna wynosi 100, a oprocentowanie $i = 15\%$.
Mamy:

$$P = \frac{100(1 + 0,15\frac{91}{360})}{1 + 0,18\frac{50}{360}} = 101,26.$$

Załóżmy teraz, że inwestor kupuje certyfikat depozytowy po terminie emisji, a sprzedaje przed terminem wykupu. Ilustruje to poniższy diagram.



Warunek równoważności stóp ma postać:

$$1 + r_p\frac{N_{pm}}{360} = \big(1 + r_s\frac{N_{sm}}{360}\big)\big(1 + r\frac{N_{pm} - N_{sm}}{360}\big),$$

gdzie r_p jest stopą rentowności w dniu zakupu, a r_s — w dniu sprzedaży. Zatem stopa rentowności wynosi:

$$r = \left[\frac{1 + r_p\frac{N_{pm}}{360}}{1 + r_s\frac{N_{sm}}{360}} - 1\right]\frac{360}{N_{pm} - N_{sm}}.$$

Przykład. Jeżeli kupimy 13-tygodniowy certyfikat depozytowy 20 dni przed terminem wykupu przy stopie 16%, i sprzedamy go po 10 dniach przy stopie 15,8%, to uzyskamy stopę rentowności:

$$r = \left[\frac{1 + 0,16\frac{20}{360}}{1 + 0,158\frac{10}{360}} - 1\right]\frac{360}{20 - 10} = 16,13\%$$

Sprzedając przy stopie 16% uzyskamy stopę rentowności 15,93%.

4.2. Analiza instrumentów o podstawie dyskontowej

Jeśli inwestor przetrzyma bon skarbowy kupiony po cenie P do terminu wykupu, to stopa dyskonta wynosi:

$$d = \left(1 - \frac{P}{FV}\right) \cdot \frac{360}{N_{pm}},$$

bo $P = FV(1 - d\frac{N_{pm}}{360})$, natomiast stopa rentowności:

$$r = (\frac{FV}{P} - 1) \cdot \frac{360}{N_{pm}}.$$

(Wynika to z podstawowej zależności $1 - d\frac{N_{pm}}{360} = \frac{1}{1+r\frac{N_{pm}}{360}}$.)

Przykład. Inwestor zakupił 13-tygodniowy bon skarbowy o wartości nominalnej 100, dla którego pozostało 20 dni do wykupu. Cena zakupu wynosiła 99,10. Wtedy

$$d = (1 - \frac{99,1}{100}) \cdot \frac{360}{20} = 16,2\%,$$

$$r = (\frac{100}{99,1} - 1) \cdot \frac{360}{20} = 16,35\%.$$

Znajomość stopy r pozwala na wyznaczenie ceny P:

$$P = \frac{FV}{1 + r\frac{N_{pm}}{360}}.$$

Przykład. Możemy kupić bon skarbowy o wartości nominalnej 100, z 50-dniowym terminem wykupu. Chcemy osiągnąć stopę dochodu 15%. Po jakiej cenie należy nabyć bon?

$$P = \frac{100}{1 + 0,15\frac{50}{360}} = 97,96.$$

W przypadku, gdy inwestor kupuje bon po terminie emisji, a sprzedaje przed terminem wykupu, stopa rentowności dana jest wzorem (już znanym):

$$r = \left[\frac{1 + r_p\frac{N_{pm}}{360}}{1 + r_s\frac{N_{sm}}{360}} - 1\right] \frac{360}{N_{pm} - N_{sm}}.$$

5. Rynek kapitałowy

5.1. Obligacje

Obligacja jest papierem wartościowym, w którym emitent stwierdza istnienie określonego zobowiązania w stosunku do nabywcy obligacji.

Obligacje charakteryzują się:
— wartością nominalną;
— terminem ważności;
— wielkością i częstością wypłaty odsetek.

Ze względu na tę ostatnią cechę wyróżnia się:
— obligacje o stałym oprocentowaniu;
— obligacje o zmiennym oprocentowaniu;
— obligacje indeksowane.

Do obligacji o stałym oprocentowaniu zaliczamy obligacje kuponowe (zwykłe), np. w Polsce dwuletnie, czy czteroletnie obligacje Skarbu Państwa, oraz obligacje bez odsetek (zerokuponowe, dyskontowe), które sprzedaje się nie według wartości nominalnej, ale z dyskontem.

Do obligacji o zmiennym oprocentowaniu należą takie obligacje, których oprocentowanie zmienia się częściej niż raz w roku i zależy od stopy zwrotu krótkoterminowych instrumentów finansowych, np. bonów skarbowych. Np. obligacje PPT o oprocentowaniu zmiennym, w których odsetki wypłacane są kwartalnie i wynoszą 1,05·rentowność 13-tygodniowych bonów skarbowych.
Wreszcie obligacje indeksowane to takie, których odsetki powiększane są o procent wynikający ze stopy inflacji lub cen pewnych towarów.
Emitentami obligacji mogą być:
— Skarb Państwa;
— agencje rządowe;
— agencje lokalne (miasta i gminy);
— banki, organizacje społeczne, fundacje, przedsiębiorstwa.

Historia. Pierwsze obligacje pojawiły sie prawdopodobnie we Włoszech w XIV w. Obywatele Florencji byli nakłaniani do pożyczania pieniędzy władzom miasta, ale mieli prawo odsprzedawać te pożyczki innym. Tego typu pożyczki były popularne również w Niderlandach. Postać prawie współczesną miały tzw. *konsole*[3], które emitowano w Anglii w XVIII w. Był to częściowo wydrukowany, a częściowo wypisany dokument zawierający dane nabywcy pożyczki i warunki pożyczki. Oprocentowanie konsol wynosiło 3% lub 5%. Rząd mógł je wykupić tylko wtedy, gdy ich cena rynkowa była nie mniejsza od ich wartości nominalnej.

Najważniejsze zasady przy inwestycji w obligacje:
1. Wzrost rynkowych stóp procentowych powoduje spadek cen obligacji, zatem wzrost ich rentowności.
2. Spadek rynkowych stóp procentowych powoduje wzrost cen obligacji, zatem spadek ich rentowności.
3. Jeżeli stopa zwrotu w okresie do wykupu jest równa oprocentowaniu obligacji to jej cena jest równa wartości nominalnej.
4. Im wyższe oprocentowanie nominalne obligacji, tym krótszy czas trwania obligacji, zatem skraca się czas ryzyka inwestycji.
5. Im dłuższy średni czas trwania obligacji tym obligacja jest bardziej wrażliwa na zmiany stóp procentowych.

Przykład. Jak rynkowa stopa procentowa wpływa na cenę obligacji?
Jeśli rynkowa stopa procentowa wynosi 10%, to kupując obligację, która za rok przyniesie nam kwotę 1100 zł, płacimy 1100/1,1 = 1000 zł. Jeżeli następnego dnia rynkowa stopa procentowa spadnie do 5%, to kolejny nabywca zapłaci za nią 1100/1,05 = 1047,62 zł. Gdyby jednak rynkowa stopa procentowa wzrosła do 12%, to kolejny nabywca zapłaciłby za nią tylko 1100/1,12 = 982,14 zł.
To zjawisko jest odpowiedzialne za zmianę wyceny funduszy obligacji. Nawet jeśli dany fundusz nie zamierza sprzedawać posiadanych obligacji, to i tak musi je wyceniać na podstawie bieżącej ceny rynkowej. Gdy stopa rośnie, to wartość funduszu spada.
W wycenie obligacji często wykorzystuje się *rentowność w okresie do wykupu* (ang. *yield to maturity*, skrót YTM). Jest to po prostu określana na podstawie przyszłych przychodów wewnętrzna stopa zwrotu.
Używa się także pojęć:
1. cena czysta obligacji – cena rynkowa obligacji bez skumulowanych odsetek;
2. cena brudna obligacji - cena rynkowa obligacji powiększona o skumulowane odsetki.

Przykład.
Rozważmy obligację trzyletnią o wartości nominalnej 100,00 PLN i kuponach odsetkowych wypłacanych co rok wynoszących 5,00 PLN, notowaną po kursie 98,38%. Od ostatniej wypłaty odsetek upłynął kwartał. Wtedy
Cena rynkowa (czysta): 98,38% x 100,00=98,38 PLN
Cena rynkowa (brudna): 98,38 + 0,25 x 5,00=99,63 PLN

[3] Nazwa pochodzi od Consolidated Fund — był to fundusz konsolidujący rozmaite długi zaciągnięte przez skarb państwa i rodzinę królewską

Obligacje a stopy procentowe. W przeprowadzanych do tej pory rozumowaniach zakładaliśmy, że stopy procentowe są dane i wyceny rozmaitych instrumentów wynikają z tych stóp. Jest jednak trochę inaczej. Rynek obligacji jest ogromny (ok. 18 bilionów dolarów w obrocie międzynarodowym, ok. 50 bilionów dolarów w obrocie wewnętrznym wszystkich państw), i z tego względu jest jednym z ważniejszych czynników wpływających na stopy procentowe. Jeśli inwestorzy nie będą pewni perspektyw danego państwa, jeżeli na rynku finansowym pojawią się wątpliwości co do polityki fiskalnej i monetarnej rządu, to zaczną pozbywać się obligacji, co spowoduje spadek ich ceny, a zatem wzrost rentowności, co w rezultacie doprowadzi do wzrostu stóp procentowych. Tak więc rynek obligacji może ukarać niesprawny rząd wyższymi kosztami zaciągania pożyczki. Pojawia się sprzężenie zwrotne: wysoki deficyt powoduje wyższe wypłaty odsetek, deficyt się zwiększa, stopy znowu rosną i.t.d. Wpływa to ostatecznie w zasadzie na wszystkie klasy aktywów finansowych (w tym akcji i nieruchomości), a także na koszt kredytu dla przeciętnego obywatela. Rząd może sobie radzić ograniczając wydatki lub podnosząc podatki (albo przestać spłacać obligacje).

5.2. Akcje

Akcja jest dokumentem stwierdzającym udział posiadacza akcji w majątku spółki akcyjnej. Z tego tytułu ma on prawo do uczestniczenia w podziale zysków spółki i do uczestniczenia w kierowaniu spółką.
Tradycyjna akcja jest dokumentem wydrukowanym na odpowiednio zabezpieczonym przed fałszerstwem papierze. Obecnie jednak akcje istnieją w postaci zapisu elektronicznego. Nabywca otrzymuje jedynie świadectwo depozytowe potwierdzające nabycie przez niego określonej liczby akcji.
Nabycie jednej akcji daje (na ogół) prawo do jednego głosu na zebraniach akcjonariuszy. Na walnym zebraniu akcjonariuszy może zapaść decyzja o wypłacie *dywidendy* — jest to część zysku spółki przeznaczonego do podziału przypadająca na jedną akcję.
Akcje można nabywać na rynku pierwotnym (od emitenta) lub wtórnym.
Do wyceny akcji stosuje się dwie grupy metod:
– analiza techniczna,
– analiza fundamentalna.
Ich celem jest oszacowanie przyszłej wartości akcji.
Dochody jakie można uzyskać z tytułu posiadania akcji to:
– dywidendy,
– wartość akcji w chwili, w której inwestor sprzedaje akcję.
Załóżmy, że inwestor kupuje akcję w celu przetrzymania przez n okresów. Jeżeli D_t oznacza dywidendę płaconą po t-tym okresie, P_n cenę akcji po n okresach, a r jest zakładaną stopą zwrotu inwestora, to maksymalna cena zakupu wynosi

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_t}{(1+r)^t} + \frac{P_n}{(1+r)^n}.$$

Niestety inwestor nie wie ile będą wynosiły dywidendy, i jaka będzie cena akcji w przyszłości.
Dla uproszczenia załóżmy, że inwestor nie zamierza pozbywać się akcji. Wtedy jego dochody wynikają wyłącznie z dywidend, więc

$$P = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+r)^t}.$$

Na podstawie danych z przeszłości opracowano różne modele wzrostu dywidendy. Najczęściej rozważane to:
1) Model stałej wartości dywidendy: $D_1 = D_2 = \cdots = D$. Wtedy

$$P = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D}{(1+r)^t} = \frac{D}{r}.$$

Jak widać jest to wartość bieżąca renty wieczystej płatnej w wysokości D.
2) Model wzrostu równomiernego (Gordona-Shapiro)
Zakłada się, że dywidenda rośnie według stopy $g < r$, tj. $D_t = D(1+g)^t$, więc

$$P = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D(1+g)^t}{(1+r)^t} = \frac{D}{r-g}.$$

3) Model dwóch faz wzrostu dywidendy.
Zakłada się, że przez N okresów dywidenda rośnie w tempie g_1, a następnie w tempie g_2, $g_2 < g_1$. Wtedy

$$\begin{aligned} P &= \textstyle\sum_{t=1}^{N} \frac{D(1+g_1)^t}{(1+r)^t} + \sum_{t=N+1}^{\infty} \frac{D(1+g_1)^N(1+g_2)^{t-N}}{(1+r)^t} = \\ &= \tfrac{D}{r-g_1}\left[1 - \left(\tfrac{1+g_1}{1+r}\right)^N\right] + \tfrac{D}{r-g_2}\left(\tfrac{1+g_1}{1+r}\right)^{N-1} \tfrac{1+g_2}{1+r}. \end{aligned}$$

Przykład. Inwestor chce zakupić akcję, dla której dywidenda za ostatni okres wynosiła 6 zł. Wymagana stopa zwrotu 15%. Zakładając, że inwestor nie zamierza sprzedawać akcji wycenić ją.
a) Przy założeniu stałej dywidendy: $P = \frac{6}{0{,}15} = 40$.
b) Przy założeniu 10% wzrostu dywidendy: $P = \frac{6(1{,}1)}{0{,}15-0{,}1} = 132$.
c) Przy założeniu 12% wzrostu dywidendy przez 2 lata, a potem 9%: $P = 102,61$.