1. Spłata długów

Kredyt i pożyczka bywają traktowane jako synonimy, ale w sensie prawno-ekonomicznym bardzo się różnią. Mianowicie:
- Pożyczka jest instytucją prawa cywilnego i może jej udzielać tylko właściciel pieniędzy. Kredyt natomiast jest instytucją prawa bankowego i bank udzielający kredytu nie musi być właścicielem pieniędzy.
- Pożyczkobiorca staje się właścicielem pieniędzy, a pożyczkodawca nie może ingerować w sposób ich wydawania. Kredytobiorca uzyskuje jedynie prawo do czasowej dyspozycji pewną kwotą.
- Przedmiotem pożyczki może być gotówka lub inne rzeczy (przedmioty materialne). Przedmiotem kredytu są środki pieniężne występujące w postaci bezgotówkowego pieniądza bankowego (nie banknoty jako przedmioty materialne).
- Bank udziela kredytu na ściśle określony we wniosku kredytowym cel. Przy pożyczce nie ma tego warunku.
- Bank ma prawo kontrolowania wykorzystania kredytu przez cały okres jego trwania.

Banki mogą udzielać pożyczek (dopuszcza to prawo bankowe), ale w praktyce udzielają głównie kredytów. Podstawowym warunkiem udzielenia kredytu jest posiadanie przez kredytobiorcę *zdolności kredytowej*, tj. wypłacalności kredytobiorcy, gwarantującej zwrot kredytu wraz z odsetkami w umownych terminach. Ocena zdolności kredytowej nie jest przedmiotem negocjacji. Bank dokonuje jej samodzielnie.

Kredyty są bardzo różnorodne. Można je podzielić według następujących kryteriów:
- okres kredytowania;
- metoda udzielenia kredytu;
- cel kredytu.

Według pierwszego kryterium wyróżniamy kredyty *krótkoterminowe* (do 1. roku), *średnioterminowe* (1–3 lat) i *długoterminowe* (powyżej 3. lat). Według drugiego kryterium mamy kredyty w rachunku bieżącym oraz w rachunku pożyczkowym. W umowie o kredyt w rachunku bieżącym kredytobiorca ma do dyspozycji określony limit środków finansowych. W czasie trwania umowy kredytobiorca pobiera z banku pieniądze w ramach przyznanego mu limitu i zwraca tyle, ile chwilowo może. Saldo może więc być ujemne (*debetowe*), bądź dodatnie (*kredytowe*). Odsetki bankowe są naliczane jedynie od salda ujemnego. W przypadku kredytu w rachunku kredytowym bank tworzy nowy rachunek, a klient składa dyspozycje płatnicze dotyczące tego rachunku. Taki kredyt może być zrealizowany jednorazowo, bądź w kilku kolejno uruchamianych częściach zwanych *transzami* kredytu.

Ze względu na cele kredytu wyróżnia się kredyty *obrotowe* oraz *inwestycyjne.*

Warto wspomnieć jeszcze o kredycie *lombardowym.* Jego cechą charakterystyczną jest brak konieczności składania wniosków i zaświadczeń, bo jest on pobierany pod zastaw przedmiotów wartościowych lub papierów wartościowych.

Są także kredyty *preferencyjne* udzielane przez banki zgodnie z projektami odpowiednich linii kredytowych. Zasady obsługi tych linii są ustalane przez instytucje państwowe, banki, i właścicieli zaangażowanych funduszy, jak:
- budżet państwowy;
- międzynarodowe organizacje finansowe (np. Bank Światowy czy MFW);

— rządy, instytucje i przędsiębiorstwa rządowe innych krajów.
Oferta kredytowa banków jest mocno zróżnicowana. Aby kredytobiorca mógł wybrać najkorzystniejszą dla siebie formę powinien się orientować w sposobach spłaty (amortyzacji) kredytu i znać technikę obliczania kosztów obciążeń kredytowych.
Każda umowa kredytowa powinna określać wysokość kredytu, formę spłaty, terminy spłat, wysokość stopy procentowej i okres kapitalizacji, formę i wysokość spłacanych odsetek (ewentualnie także marży i prowizji). Spłatę długu nazywa się też *amortyzacją* bądź *umorzeniem długu.*
Częstą formą spłaty długu jest forma ratalna, której podstawę stanowią raty zwane płatnościami, spłatami, bądź ratami łącznymi. Zakładamy, że raty płacone są w równych odstępach czasu zwanych okresami spłat. Raty mogą być spłacane na początku lub końcu okresu spłat (spłaty z góry lub z dołu). Spłatę z góry można oczywiście traktować jako spłatę z dołu długu pomniejszonego o pierwszą ratę. Zatem wystarczy się ograniczyć do spłat z dołu.
Przy rozliczeniach związanych z długiem należy uwzględnić trzy okresy: stopy procentowej, kapitalizacji i spłat. Jeżeli wszystkie te okresy są równe, to spłaty nazywamy zgodnymi; jeżeli nie, to spłaty są niezgodne.
Zasada podstawowa: Dług został spłacony, gdy w ustalonym momencie czasu aktualna wartość długu jest równa sumie aktualnych wartości wszystkich spłat umarzających dług.
Zasada ta wymaga przeprowadzenia aktualizacji kwot na wybrany moment czasu. Jako regułę przyjmuje się, że do rozliczeń długów krótkoterminowych stosuje się model kapitalizacji prostej (dla aktualizacji wstecz — dyskonto proste lub handlowe), a do rozliczeń długów średnio- i długoterminowych stosuje się model kapitalizacji złożonej z dołu.
Przyjmijmy oznaczenia:
— S — wartość początkowa;
— N — liczba rat umarzających dług;
— n — wskaźnik bieżący, $n = 1, 2, \ldots, N$;
— T_n — n-ta rata kapitałowa (część długu spłacana w n-tej spłacie);
— Z_n — n-ta rata odsetek (wartość odsetek spłacanych w n-tej spłacie);
— A_n — n-ta rata łączna (n-ta spłata, n-ta płatność);
— S_n — pozostała część długu po spłaceniu n rat (dług bieżący)
— Z — suma wartości nominalnych wszystkich rat odsetek.
Ciągi (T_n), (Z_n), (A_n), (S_n), i liczba Z wchodzą w skład tzw. *planu spłaty długu.*
Plan spłaty często przedstawia się w postaci tabelarycznej.
Wielkości wchodzące w skład planu spłaty długu nie są niezależne, np.

$$A_n = T_n + Z_n.$$

Niekiedy tę formułę uzupełnia się trzecim składnikiem — opłatą dodatkową (prowizją lub marżą bankową).
Z określenia mamy:

$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n.$$

Załóżmy, że rozważamy spłatę długu zgodną. Stopa procentowa wynosi r, wybrany moment aktualizacji to k.
Aktualizacja wymaga dyskontowania, przy czym można stosować dyskonto matematyczne (dokładne) lub dyskonto handlowe (przybliżone), co tutaj ma istotne znaczenie.

Fakt spłacenia długu S spłatami $A_1, A_2, \ldots, A_N$ oznacza zachodzenie równości:

$$\begin{aligned} S(1+kr) &= A_1[1+(k-1)r] + \cdots + A_{k-1}(1+r) + A_k + \\ &+ A_{k+1}(1+r)^{-1} + \cdots + A_N[1+(N-k)r)]^{-1}, \end{aligned} \qquad (1)$$

(dla modelu kapitalizacji prostej i dyskonta matematycznego)
lub

$$\begin{aligned} S(1+kr) &= A_1[1+(k-1)r] + \cdots + A_{k-1}(1+r) + A_k + \\ &+ A_{k+1}(1-r) + \cdots + A_N[1-(N-k)r)], \end{aligned} \qquad (2)$$

(dla modelu kapitalizacji prostej i dyskonta handlowego)
lub

$$\begin{aligned} S(1+r)^k &= A_1(1+r)^{k-1} + \cdots + A_{k-1}(1+r) + A_k + \\ &+ A_{k+1}(1+r)^{-1} + \cdots + A_N(1+r)^{N-k}, \end{aligned} \qquad (3)$$

(dla modelu kapitalizacji złożonej z dołu).
Dla modelu kapitalizacji prostej zarówno wybór momentu k, jak i wybór rodzaju dyskonta jest istotny. Jeżeli równość (1) lub (2) zachodzi dla pewnego k, to może nie zachodzić dla innego k. Oznacza to również, że ten sam dług S przy tej samej stopie procentowej r i tych samych płatnościach $A_1, \ldots, A_N$ może być spłacony lub nie w zależności od wyboru momentu aktualizacji k. Równość (1) ma dla $k = 0$ postać

$$S = \frac{A_1}{1+r} + \frac{A_2}{1+2r} + \cdots + \frac{A_N}{1+Nr},$$

a równość (2) dla $k = 0$:

$$S = A_1(1-r) + A_2(1-2r) + \cdots + A_N(1-Nr).$$

Natomiast dla $k = N$ obie równości są identyczne:

$$S(1+Nr) = A_1[1+(N-1)r] + A_2[1+(N-2)r] + \cdots + A_N.$$

Jeżeli stosujemy kapitalizację złożoną z dołu, to wybór momentu aktualizacji nie jest istotny. Aby to stwierdzić, wystarczy podzielić (3) przez $(1+r)^k$:

$$S = \frac{A_1}{1+r} + \frac{A_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{A_N}{(1+r)^N}.$$

2. Plan spłaty długu krótkoterminowego

Założenia:
— spłaty $A_1, \cdots, A_N$ umarzają dług krótkoterminowy S;
— spłaty są zgodne;
— stosujemy model kapitalizacji prostej;
— momentem aktualizacji jest k.

Przypomnijmy warunek spłaty długu S:

$$\begin{aligned} S &= A_1\frac{1+(k-1)r}{1+kr}+\dots+A_{k-1}\frac{1+r}{1+kr}+A_k\frac{1}{1+kr}+ \\ &+ A_{k+1}\frac{1}{(1+r)(1+kr)}+\dots+A_N\frac{1}{[1+(N-k)r)](1+kr)}, \end{aligned}$$

(dla modelu kapitalizacji prostej i dyskonta matematycznego),

$$\begin{aligned} S &= A_1\frac{1+(k-1)r}{1+kr}+\dots+A_{k-1}\frac{1+r}{1+kr}+A_k\frac{1}{1+kr}+ \\ &+ A_{k+1}\frac{1-r}{1+kr}+\dots+A_N\frac{1+(N-k)r)}{(1+kr)}, \end{aligned}$$

(dla modelu kapitalizacji prostej i dyskonta handlowego). Obliczymy stan zadłużenia po spłaceniu n rat. Jest to różnica między zaktualizowaną na moment k wartością początkową długu, a sumą zaktualizowanych na moment k spłaconych rat łącznych, czyli w przypadku dyskonta matematycznego prostego:

$$\bar{S}_n = S(1+kr)-A_1[1+(k-1)r]-\dots-A_n[1-(k-n)r],\ \text{gdy } n\leqslant k;$$

oraz

$$\bar{S}_n = S(1+kr)-A_1[1+(k-1)r]-\dots-A_k-\frac{A_{k+1}}{1+r}-\dots-\frac{A_n}{1-(n-k)r},\ \text{gdy } n>k;$$

a w przypadku dyskonta handlowego:

$$\bar{S}_n = S(1+kr)-A_1[1+(k-1)r]-\dots-A_n[1+(k-n)r].$$

Teraźniejszą wartość długu $\bar{S}_n$ oznaczamy S_n^0. Zatem

$$\begin{aligned} S_n^0 &= S-A_1\frac{1+(k+1)r}{1+kr}-\dots-A_k\frac{1}{1+kr}- \\ &- A_{k+1}\frac{1}{(1+r)(1+kr)}-\dots-A_n\frac{1}{[1+(n-k)](1+kr)}, \end{aligned}$$

(dla dyskonta matematycznego prostego), oraz

$$S_n^0 = S-A_1\frac{1+(k+1)r}{1+kr}-\dots-A_n\frac{1+(k-n)r}{1+kr},$$

(dla dyskonta handlowego).
W szczególności $S_N^0=0$. S_n^0 nazywamy *wartością pozostałego długu* (przypomnijmy: aktualizacja na moment 0), natomiast jeśli tę wartość zaktualizujemy na moment n, to otrzymamy *dług bieżący* S_n. Zatem

$$S_n = S_n^0(1+nr).$$

Dla długów krótkoterminowych, czyli w przypadku modelu kapitalizacji prostej, istotne znaczenie ma rozkład raty łącznej A_n na część kapitałową B_n (procentującą) i część odsetkową C_n (nieprocentującą), czyli

$$A_n = B_n + C_n.$$

Odsetki proste od kapitału S wynoszą

$$Z = SNr.$$

Zwykle są spłacane ratalnie, ale niekoniecznie według długu bieżącego. Część jest umarzana przez raty łączne, a reszta przez odsetki od części kapitałowej raty łącznej. Dlatego istotny jest rozkład raty łącznej na część kapitałową (procentującą) i część odsetkową. Ten rozkład zależy od wybranego momentu aktualizacji k.
Pełny plan spłaty długu krótkoterminowego tworzą ciągi (A_n), (B_n), (C_n), (S_n) oraz liczba Z.
Przykład Dług 100 j.p. należy spłacić w czterech ratach miesięcznych, przy czym $A_1 = 20$, $A_2 = 30$, $A_3 = 40$. Wyznaczyć A_4, jeżeli miesięczna stopa procentowa $r = 1,25\%$ i kapitalizacja jest prosta. Wykonać obliczenia w dwóch wariantach dyskonta oraz
a) przy aktualizacji na moment 0,
b) przy aktualizacji na koniec czwartego miesiąca.
a) Jeżeli stosujemy dyskonto matematyczne proste, to:

$$S = \frac{A_1}{1+r} + \frac{A_2}{1+2r} + \frac{A_3}{1+3r} + \frac{A_4}{1+4r},$$

skąd $A_4 \approx 13,05$. Kwoty długu bieżącego wynoszą:

$$S_n = (1+nr)[S - (\frac{A_1}{1+r} + \frac{A_2}{1+2r} + \cdots + \frac{A_n}{1+nr})],$$

czyli $S_1 \approx 81,25$, $S_2 \approx 52,25$, $S_3 \approx 12,89$, $S_4 \approx 0$. W przypadku dyskonta handlowego:

$$S = A_1(1-r) + A_2(1-2r) + A_3(1-3r) + A_4(1-4r),$$

czyli $A_4 \approx 13,16$. Kwoty długu bieżącego wynoszą:

$$S_n = (1+nr)[S - A_1(1-r) - A_2(1-2r) - \cdots - A_n(1-nr)],$$

stąd $S_1 \approx 81,25$, $S_2 \approx 52,27$, $S_3 \approx 12,97$, $S_4 \approx 0$.
b) Teraz $k = 4$. Dla dyskonta matematycznego prostego:

$$S = A_1\frac{1+3r}{1+4r} + A_2\frac{1+2r}{1+4r} + A_3\frac{1+r}{1+4r} + A_4\frac{1}{1+4r},$$

stąd $A_4 = 13$, oraz

$$S_n = (1+nr)\left[S - A_1\frac{1+(4-1)r}{1+4r} - \cdots - A_n\frac{1+(4-n)}{1+4r}\right],$$

$S_1 \approx 81,24$, $S_2 \approx 52,23$, $S_3 \approx 12,84$, $S_4 \approx 0$. Dla dyskonta handlowego otrzymujemy w tym przypadku takie same rezultaty.

3. Spłata długu w równych ratach łącznych

Często wygodne dla dłużnika (i wierzyciela) jest ustalenie, że dług zostanie spłacony w równych ratach łącznych: $A_1 = \ldots = A_n = A$. Wysokość raty A wynika z warunków spłaty (zależy od stopy procentowej, liczby i częstości rat).

Moment aktualizacji: k.

1. Dyskonto matematyczne proste. Ponieważ

$$S(1+kr) = A[(1+(k-1)r) + \cdots (1+r) + 1 + \frac{1}{1+r} + \cdots + \frac{1}{1+(N-k)r}],$$

więc sumując pierwsze k składników w nawiasie otrzymamy:

$$A = S\frac{1+kr}{k(1+(k-1)r/2) + 1/(1+r) + \cdots + 1/[1+(N-k)r]}.$$

Wysokość raty A zależy od k. Ustalenie momentu aktualizacji k jest równoważne podzieleniu raty A na część kapitałową B, podlegającą oprocentowaniu, i odsetkową C. Mamy

$$\begin{cases} A = B + C \\ \sum_{n=1}^{N} B(1+(n-1)r) + \sum_{n=1}^{N} C = S(1+Nr), \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} A = B + C \\ BN(1+\frac{N-1}{2}r) + CN = S(1+Nr), \end{cases}$$

skąd

$$\begin{cases} B = \frac{2}{N(N-1)r}[S(1+Nr) - NA] \\ C = A - B \end{cases}$$

Część odsetkowa C może być ujemna — wtedy jest dyskontem.

Zastosujemy te wzory dla dwóch sytuacji:

Przykład Dług 100 j.p. należy spłacić w trzech miesięcznych ratach równych. Miesięczna stopa procentowa wynosi 2%.

a) Jeżeli $k = \frac{N+1}{2} = 2$, to obliczamy A ze wzoru

$$A = S\frac{1+\frac{N+1}{2}r}{(1+\frac{N-1}{2})r) + \cdots + (1+r) + 1 + \frac{1}{(1+r)} + \cdots + \frac{1}{[1+\frac{N-1}{2}r]}},$$

więc $A \approx 34,66$, $S_1 \approx 67,33$, $S_2 \approx 33,99$, $S_3 \approx 0$, $B \approx 33,56$, $C \approx 1,1$.

b) Jeżeli $k = N = 3$, to ze wzoru

$$A = S\frac{1+Nr}{(1+(N-1)r) + \cdots + (1+r) + 1},$$

mamy $A \approx 34,6405$, $S_1 \approx 67,32$, $S_2 \approx 33,98$, $S_3 \approx 0$, $B \approx 34,6417$, $C \approx -0,0012$.

2. Dyskonto handlowe

Tym razem

$$S(1+kr) = A[(1+(k-1)r) + \cdots + (1+(k-N)r)] = AN[1+(k-\frac{N+1}{2})r],$$

skąd

$$A = \frac{S}{N} \cdot \frac{1+kr}{1+(k-(N+1)/2)r}.$$

Rozkład na część kapitałową i odsetkową jest taki jak poprzednio:

$$\begin{cases} B = \frac{2}{N(N-1)r}[S(1+Nr) - NA] \\ C = A - B \end{cases}$$

Jeżeli jako moment aktualizacji przyjmiemy $k = \frac{N+1}{2}$, to otrzymamy tzw. *raty stałego stosunku*:

$$A = \frac{S}{N} \cdot \left(1 + \frac{N+1}{2} r\right).$$

Dla rat stałego stosunku:

$$B = \frac{S}{N},\ C = \frac{S}{N} \cdot \frac{N+1}{2} r,$$

a zatem spłata każdej raty łącznej powoduje spłatę N-tej części długu oraz części odsetek. Pozostałą część odsetek pokryją odsetki od części kapitałowych $\frac{S}{N}$. Zauważmy, że część kapitałowa nie zależy od stopy procentowej. Dług jest spłacany w równych ratach kapitałowych i równych ratach łącznych.
Jeżeli jako moment aktualizacji przyjmiemy $k = N$, to otrzymamy tzw. *raty kupieckie*:

$$A = \frac{S}{N} \cdot \frac{1 + Nr}{1 + \frac{N-1}{2} r},$$

dla których

$$B = A = \frac{S}{N} \cdot \frac{1 + Nr}{1 + \frac{N-1}{2} r},\ C = 0.$$

A więc raty kupieckie składają się wyłącznie z części kapitałowej (cała rata podlega oprocentowaniu).
Przykład Dług 100 j.p. należy spłacić w trzech miesięcznych ratach równych. Miesięczna stopa procentowa wynosi 2%.
a) Rata stałego stosunku wynosi $A \approx 34,67$. Dalej: $B \approx 33,33$, $C \approx 1,33$.
b) Rata kupiecka $A \approx 34,64$.

4. Spłata długów średnio- i długoterminowych

Oznaczenia:
— S — wartość początkowa długu;
— N — liczba rat umarzających dług;
— n — wskaźnik bieżący, $n = 1, 2, \ldots, N$;
— A_n — n-ta rata łączna (n-ta spłata, n-ta płatność);
— T_n — n-ta rata kapitałowa (część długu spłacana w n-tej spłacie);
— Z_n — n-ta rata odsetek (wartość odsetek spłacanych w n-tej spłacie);
— S_n — pozostała część długu po spłaceniu n rat (dług bieżący)
— Z — suma wartości nominalnych wszystkich rat odsetek.
Stosujemy model kapitalizacji złożonej z dołu.
Zasada ogólna: Zaktualizowana na określony moment czasu wartość długu jest równa sumie zaktualizowanych na ten moment czasu wartości rat łącznych.
W modelu kapitalizacji złożonej moment aktualizacji nie jest istotny. Zatem wystarczy dokonać aktualizacji na moment N. W przypadku spłat zgodnych daje to:

$$Sq^N = A_1 q^{N-1} + A_2 q^{N-2} + \cdots + A_N,$$

gdzie $q = 1 + r$ jest czynnikiem pomnażającym. Dług bieżący S_n jest różnicą między początkową wartością długu zaktualizowaną na moment n a sumą wartości n pierwszych rat łącznych zaktualizowanych na moment n. Zatem

$$S_n = Sq^n - (A_1 q^{n-1} + A_2 q^{n-2} + \cdots + A_n).$$

Jest to *zależność retrospektywna*, gdyż wyraża dług bieżący przez raty łączne już spłacone.
Podstawiając
$$S = \frac{A_1}{q} + \frac{A_2}{q^2} + \cdots + \frac{A_N}{q^N}$$
otrzymujemy
$$S_n = \frac{A_{n+1}}{q} + \frac{A_{n+2}}{q^2} + \cdots + \frac{A_N}{q^{N-n}}.$$
Tę zależność nazywamy *prospektywną*, gdyż wyraża dług bieżący przez niespłacone raty.
Ponieważ
$$S_{n-1} = \frac{A_n}{q} + \frac{A_{n+1}}{q^2} + \cdots + \frac{A_N}{q^{N-n-1}},$$
czyli
$$qS_{n-1} = A_n + \frac{A_{n+1}}{q} + \cdots + \frac{A_N}{q^{N-n}},$$
więc
$$qS_{n-1} = A_n + S_n.$$
Otrzymaliśmy zależność rekurencyjną:
$$S_n = qS_{n-1} - A_n,$$
z której z kolei wynika, że
$$A_n = qS_{n-1} - S_n = (1+r)S_{n-1} - S_n = (S_{n-1} - S_n) + S_{n-1}r.$$
Zatem w n-tej racie łącznej mamy spłatę kapitału w wysokości $S_{n-1} - S_n$ i odsetki od poprzedzającej wartości bieżącej długu, $Z_n = S_{n-1}r$.
Poszczególne raty mogą być równej lub różnej wysokości. Spłaty mogą być z góry lub z dołu. Oczywiście spłaty z góry (tzn. pierwsza rata jest płacona w momencie zaciągania długu) można traktować jako spłaty z dołu długu pomniejszonego o pierwszą ratę.
Jest wiele sposobów spłaty długu. Ograniczymy się do dwóch schematów:
— zadane są raty łączne $A_1, A_2, \ldots, A_N$;
— zadane są raty długu (kapitałowe) $T_1, T_2, \ldots, T_N$.
W obu schematach zakładamy, że:
1) zarówno dług, jak i odsetki zwracane są ratalnie:
2) rata łączna jest sumą raty kapitałowej i odsetek, nie występują natomiast opłaty dodatkowe, zatem $A_n = T_n + Z_n$;
3) odsetki wyznaczane są w zależności od długu bieżącego, czyli $Z_n = S_{n-1}r$.

4.1. Spłata długów o zadanych ratach łącznych zgodna

Przykład Ułożyć plan spłaty długu 200 j.p. w 4. rocznych płatnościach: $A_1 = 100$, $A_2 = 90$, $A_3 = 70$, $A_4 = 28,32$.
Roczną stopę procentową określa warunek $S_4 = 0$, czyli
$$200q^4 - (100q^3 + 90q^2 + 70q + 28,32) = 0.$$
Stąd $q = 1,2$, czyli $r = 0,2 = 20\%$.
Plan spłaty:

n	S_{n-1}	Z_n	A_n	T_n	S_n
1	200	40	100	60	140
2	140	28	90	62	78
3	78	15,6	70	54,4	23,6
4	23,6	4,72	28,32	23,6	0
$\sum$	—	88,32	288,32	200	—

Przykład Plan spłaty przewiduje 5 płatności rocznych o następujących wysokościach: $A_1 = 20$, $A_2 = 29$, $A_3 = 37$, $A_4 = 34$, $A_5 = 11$. Roczna stopa 10%. Ułożyć tabelę spłaty długu.
Obliczymy S dyskontując raty na moment 0 ($\upsilon = \frac{1}{1+r}$ – czynnik dyskontujący).

$$S = A_1\upsilon + A_2\upsilon^2 + \cdots + A_5\upsilon^5,$$

$$S = \frac{20}{1,1} + \frac{29}{1,1^2} + \frac{37}{1,1^3} + \frac{34}{1,1^4} + \frac{11}{1,1^5} = 100.$$

n	S_{n-1}	Z_n	A_n	T_n	S_n
1	100	10	20	10	90
2	90	9	29	20	70
3	70	7	37	30	40
4	40	4	34	30	10
5	10	1	11	10	0
$\sum$	—	31	131	100	—

4.2. Raty łączne o równych wysokościach (annuitetowe)

Takie raty są bardzo często stosowane. Załóżmy, że dług S spłacamy N ratami w stałej wysokości A. Wysokość raty wynika z warunku:

$$S = Aa_{\overline{N|}} = A\frac{1-\upsilon^N}{r},$$

czyli

$$A = \frac{Sr}{1-\upsilon^N},$$

lub też, wyrażając to przez czynnik pomnażający $q = 1 + r$:

$$A = \frac{S(q-1)}{1-q^{-N}} = Sq^N\frac{q-1}{q^N-1}.$$

Ponadto

$$S_n = Sq^n - A\frac{q^n-1}{q-1} = Sq^n - Sq^N\frac{q^n-1}{q^N-1},$$

skąd

$$S_n = S\frac{q^N-q^n}{q^N-1}.$$

Odsetki spłacane w n-tej racie wynoszą:

$$Z_n = S_{n-1}r = S\frac{q^N-q^{n-1}}{q^N-1}r.$$

Zatem w n-tej racie spłacamy kapitał:

$$\begin{aligned} T_n &= A - Z_n = Sq^N \frac{q-1}{q^N-1} - S\frac{q^N - q^{n-1}}{q^N-1}(q-1) = \\ &= S\frac{q-1}{q^N-1}(q^N - q^N + q^{n-1}) = S\frac{q^n - q^{n-1}}{q^N-1}. \end{aligned}$$

Przykład Ułożyć w postaci tabeli plan spłaty długu w wysokości 50 j.p. w 5. równych płatnościach rocznych. Roczna stopa 10%, kapitalizacja roczna.

$$A = \frac{50 \cdot 0,1}{1 - 1,1^{-5}} \approx 13,19.$$

n	S_{n-1}	Z_n	A_n	T_n	S_n
1	50	5	13,19	8,19	41,81
2	41,81	4,18	13,19	9,01	32,8
3	32,8	3,28	13,19	9,91	22,89
4	22,89	2,29	13,19	10,90	11,99
5	11,99	1,2	13,19	11,99	0
$\sum$	—	15,95	65,95	50	—

Przykład Dług 10 000 zł spłacano rocznymi spłatami łącznymi równymi 2000 zł każda. Roczna stopa procentowa wynosi 17% i kapitalizacja jest roczna. W ciągu ilu lat dług zostanie spłacony?
Mamy:

$$10000 = 2000 a_{\overline{n}|0,17} = 2000\frac{1 - 1,17^{-n}}{0,17},$$

skąd $n = \frac{\log 100/15}{\log 1,17} \approx 12,08$.
Wynik nie jest liczbą całkowitą. Ostatnia rata (trzynasta) byłaby niepełna. Problem niepełnej liczby rat można rozwiązywać na różne sposoby, np.:
— utworzyć dodatkową niepełną ratę;
— powiększyć odpowiednio jedną z rat;
— niepełną liczbę rat zaokrąglić do najbliższej liczby naturalnej i wyznaczyć nowe raty.

Przykład a) Tworzymy 13. ratę na podstawie zależności:

$$A_{13} = [S(1+r)^{12} - As_{\overline{12}|}](1+r),$$

czyli $A_{13} = [10000 \cdot 1,17^{12} - 2000\frac{1,17^{12}-1}{0,17}] \cdot 1,17 \approx 178,80$.
b) Powiększymy pierwszą ratę. Ponieważ bez powiększenia dług bieżący po 12. latach wynosiłby

$$10000 \cdot 1,17^{12} - 2000\frac{1,17^{12}-1}{0,17} \approx 152,82,$$

więc pierwsza rata będzie wynosić

$$A_1 = 2000 + \frac{152,82}{1,17^{11}} \approx 2027,17.$$

Gdybyśmy zdecydowali się powiększyć ostatnią ratę, to byłaby ona równa

$$A_{12} = 2152,82.$$

c) Jeżeli chcemy, aby było 12 równych rat to muszą one wynosić

$$A' = \frac{10000 \cdot 0,17}{1 - 1,17^{-12}} \cdot 1,17^{12} \approx 2004,66.$$

5. Spłata długów o zadanych ratach kapitałowych zgodna

Załóżmy, że ustalone zostały raty kapitałowe $T_1, T_2, \cdots, T_N$ umarzające dług S, i że są to spłaty zgodne. Na podstawie informacji o ratach $T_1, T_2, \cdots, T_N$ ustalamy pozostałe elementy spłaty długu. Mianowicie, dług bieżący S_n wynosi

$$S_n = S - \sum_{i=1}^{n} T_i,$$

odsetki Z_n spłacane w n-tej racie łącznej wynoszą

$$Z_n = S_{n-1} r,$$

a więc raty łączne to

$$A_n = T_n + Z_n.$$

Przykład Pożyczkę 7000 zł należy spłacić w 5. ratach rocznych, w następujących ratach kapitałowych:

$$T_1 = 1000,\ T_2 = 1200,\ T_3 = 1400,\ T_4 = 1600,\ T_5 = 1800.$$

Roczna stopa 10% i kapitalizacja jest złożona roczna.

n	S_{n-1}	Z_n	A_n	T_n	S_n
1	7000	700	1700	1000	6000
2	6000	600	1800	1200	4800
3	4800	480	1880	1400	3400
4	3400	340	1940	1600	1800
5	1800	180	1980	1800	0
$\sum$	—	2300	9300	7000	—

5.1. Metoda sumy liczb

W tej metodzie raty kapitałowe tworzą ciąg arytmetyczny rosnący: $T, 2T, \ldots, NT$, lub malejący $NT, \ldots, 2T, T$. Ponieważ $\sum_{k=1}^{N} kT = S$, czyli $\frac{1}{2}N(N+1)T = S$, więc

$$T = \frac{2S}{N(N+1)}.$$

Tak więc dla ciągu rosnącego

$$T_n = nT = \frac{2S}{N(N+1)} n,$$

a dla ciągu malejącego

$$T_n = (N-n+1)T = \frac{2S}{N(N+1)}(N-n+1).$$

Stąd łatwo jest wyznaczyć kwoty długu bieżącego, odpowiednio

$$S_n = S - \sum_{k=1}^{n} \frac{2S}{N(N+1)}k = S[1 - \frac{n(n+1)}{N(N+1)}]$$

lub

$$S_n = S - \sum_{k=1}^{n} \frac{2S}{N(N+1)}(N-k+1) = S\left[1 - \frac{n(2N-n+1)}{N(N+1)}\right],$$

a następnie odsetki $Z_n = S_{n-1}r$ i raty łączne $A_n = T_n + Z_n$.
Przykład Metodą sumy liczb należy spłacić dług 10 000 zł w 4. ratach rocznych, rosnących. Stopa $r = 20\%$.
Obliczamy $T = \frac{2\cdot 10000}{4\cdot 5} = 1000$. Tabela:

n	S_{n-1}	Z_n	A_n	T_n	S_n
1	10000	2000	3000	1000	3000
2	9000	1800	3800	2000	7000
3	7000	1400	4400	3000	4000
4	4000	800	4800	4000	0
$\sum$	—	6000	16000	10000	—

5.2. Raty kapitałowe o równych wysokościach

Jeżeli raty kapitałowe mają być równe, to:

$$T = \frac{S}{N},\ S_n = S - nT = \frac{S}{N}(N-n),\ Z_n = S_{n-1}r = \frac{S}{N}(N-n+1)r.$$

Przykład Spłata długu 6000 zł w 6. równych ratach kapitałowych przy stopie $r = 15\%$.

n	S_{n-1}	Z_n	A_n	T_n	S_n
1	6000	900	1900	1000	5000
2	5000	750	1750	1000	4000
3	4000	600	1600	1000	3000
4	3000	450	1450	1000	2000
5	2000	300	1300	1000	1000
6	1000	150	1150	1000	0
$\sum$	—	3150	9150	6000	—

6. Inne plany spłaty długów

Omawiane dotąd plany spłaty długu spełniały warunki:
— dług i odsetki były spłacane ratalnie;
— odsetki były ustalane od bieżącej wartości długu;
— raty łączne były równe sumie raty kapitałowej i odsetek.

W poniższych planach te założenia nie zawsze będą spełnione.

Jednorazowa spłata długu przy ratalnej spłacie odsetek.

W tym planie odsetki spłaca się w N ratach, a dług jednorazowo w ostatniej racie, tj.
$T_1 = T_1 = \ldots = T_{N-1} = 0$, $T_N = S$,
$Z_1 = Z_2 = \ldots = Z_N = Sr$,
$A_1 = A_1 = \ldots = A_{N-1} = Sr$, $A_N = S(1+r)$.
Z tym planem związana jest metoda *spłaty długu przez fundusz umorzeniowy.* Mianowicie kapitał potrzebny na jednorazową spłatę jest gromadzony w formie wkładów oszczędnościowych tworząc fundusz umorzeniowy. Gromadzenie funduszu może się odbywać według innego modelu niż spłata odsetek.

Przykład Rada Miejska wyemitowała obligacje o wartości nominalnej 500 zł. Co pół roku wypłacane są odsetki w wysokości 10%, a termin wykupu wynosi 6 lat. W celu wykupu obligacji Rada gromadzi fundusz umorzeniowy w postaci stałych wkładów wnoszonych na koniec każdego roku, oprocentowanych na 20% rocznie. Jakiej wysokości mają być wkłady? Jaki jest roczny koszt obsługi zadłużenia?
Wpłaty tworzą rentę terminową, gdzie $n = 6$, $r = 20\%$. Zatem

$$500 = xs_{\overline{6}|0,2} = x\frac{(1+r)^6 - 1}{r},$$

czyli

$$x = \frac{500r}{(1+r)^6 - 1} \approx 50,35.$$

Obciążenie długiem wynikającym z emisji obligacji składa się z wypłacanych odsetek i wkładów. Zatem rocznie jest to:

$$2 \cdot 50 + 50,35 = 150,35.$$

Ratalna spłata długu przy jednorazowej spłacie odsetek.

Sposób I:

Załóżmy, że spłaty są zgodne i że odsetki spłacane są w i-tej racie. Raty łączne wynoszą: $A_1 = T_1, \ldots, A_i = T_i + Z^{(i)}, \ldots, A_N = T_N$, przy czym $\sum_{j=1}^{N} T_j = S$ (przyjmujemy, że raty T_j są zadane). Z zasady podstawowej wynika, że

$$Sq^N = T_1 q^{N-1} + \cdots + (T_i + Z^{(i)})q^{N-i} + \cdots + T_N,$$

czyli

$$Z^{(i)}q^{N-i} = Sq^N - \sum_{j=1}^{N} T_j q^{N-j},$$

$$Z^{(i)} = [S - \sum_{j=1}^{N} T_j q^{-j}]q^i.$$

Wysokość odsetek zależy oczywiście od i. W szczególności:

$$Z^{(1)} = [S - \sum_{j=1}^{N} T_j q^{-j}]q, \quad Z^{(N)} = Sq^N - \sum_{j=1}^{N} T_j q^{N-j}.$$

oraz $Z^{(i)} = Z^{(1)}q^{i-1}$.

Jeżeli raty kapitałowe są stałe, $T_i = \frac{S}{N}$, to:

$$Z^{(i)} = [S - \frac{S}{N}\frac{q^{-N}-1}{q-1}]q^i = \frac{S}{N}[N - \frac{q^{-N}-1}{q-1}]q^i.$$

Przykład Dług 10000 zł oprocentowany na 20% rocznie przy kapitalizacji złożonej rocznej ma być spłacony w 5. rocznych równych ratach kapitałowych, przy czym odsetki mają być spłacone jednorazowo w racie: a) pierwszej; b) piątej. Ułożyć plan spłaty.
a) $Z^{(1)} = (10000 - 2000\frac{1{,}2^{-5}-1}{0{,}2}) \cdot 1,2 = 4822,53$. Tabela:

n	S_{n-1}	Z_n	A_n	T_n	S_n
1	10000	4822,53	6822,53	2000	8000
2	8000	0	2000	2000	6000
3	6000	0	2000	2000	4000
4	4000	0	2000	2000	2000
5	2000	0	2000	2000	0
$\sum$	—	4822,53	14822,53	10000	—

b) $Z^{(5)} = [10000 - 2000\frac{1{,}2^{-5}-1}{0{,}2}]1,2^5 = 10000$. Tabela:

n	S_{n-1}	Z_n	A_n	T_n	S_n
1	10000	0	2000	2000	8000
2	8000	0	2000	2000	6000
3	6000	0	2000	2000	4000
4	4000	0	2000	2000	2000
5	2000	10000	12000	2000	0
$\sum$	—	10000	20000	10000	—

W przedstawionym planie spłaty długu wszystkie raty odsetek wyznaczane są według długu bieżącego, następnie aktualizowane na ustalony moment czasu i spłacane łącznie jako ich suma.
Sposób II:
Przyszłą wartość długu S w momencie N przedstawiamy w postaci sumy

$$Sq^N = Z^{(N)} + S.$$

Składnik $Z^{(N)}$ określa łączne odsetki od długu S w momencie N. Można go dołączyć do którejkolwiek spłaty, z uwzględnieniem zmiany wartości pieniądza w czasie. Zatem

$$Z^{(i)} = \frac{Z^{(N)}}{q^{N-i}} = \frac{S(q^N-1)}{q^{N-i}} = Sq^i(1-q^{-N}).$$

Dług S musi być pokryty przez odpowiednio dobrane raty $R_1, \dots, R_N$, które muszą spełniać warunek (w momencie N):

$$S = R_1 q^{N-1} + R_2 q^{N-2} + \dots + R_N.$$

W szczególności, gdy $R_i = R$ dla $i = 1, 2, \dots, N$, to

$$S = R\frac{q^N-1}{q-1},$$

czyli

$$R = S\frac{q-1}{q^N-1}.$$

Przykład Dla danych z poprzedniego przykładu wyznaczyć odsetki spłacane jednorazowo: a) w pierwszej; b) w piątej racie.
a) $Z^{(1)} = 10000 \cdot 1,2(1-1,2^{-5}) = 7177,47$;
b) $Z^{(5)} = 10000 \cdot 1,2^5(1-1,2^{-5}) = 14883,20$.
W obu przypadkach raty równe spłacające dług wynoszą:

$$R = 10000\frac{0,2}{1,2^5-1} = 1343,80.$$

7. Długi z dodatkową opłatą

Przy spłacie długu zazwyczaj, oprócz zwrotu długu i odsetek wymagana jest dodatkowa opłata G_n. Zatem

$$\tilde{A}_n = T_n + Z_n + G_n$$

jest ratą łączną.
Dodatkową opłatą może być *prowizja*, czyli opłata za usługę. (Tą nazwą określa się także wynagrodzenie za pośrednictwo stosowane np. w handlu komisowym).
Innym rodzajem opłaty jest *marża* wynikająca z różnicy stóp procentowych, po których bank udziela kredytu i przyjmuje kapitał w depozyt.
Wysokość opłaty dodatkowej G_n jest najczęściej ustalana w zależności od spłacanej raty kapitałowej T_n lub w zależności od wartości długu S_{n-1}. Rozważmy przykładowo wariant, w którym opłata dodatkowa wynosi $p\%$ wartości T_n, $G_n = T_n p$.
a) Jeżeli $T_n = \frac{S}{N}$, to $G_n = \frac{S}{N}p$, i łączna wartość dodatkowych opłat wynosi:

$$G = \sum_{j=1}^{N} G_j = N \cdot \frac{S}{N}p = Sp,$$

natomiast n-ta rata

$$\begin{aligned}\tilde{A}_n &= T_n + Z_n + G_n = \frac{S}{N} + \frac{S}{N}(N-n+1)r + \frac{S}{N}p = \\ &= \frac{S}{N}[1 + (N-n+1)r + p].\end{aligned}$$

b) Jeżeli $A_n = A = Sq^N\frac{q-1}{q^N-1}$, to $T_n = Sq^{n-1}\frac{q-1}{q^N-1}$, więc

$$G_n = Sq^{n-1}\frac{q-1}{q^N-1}p.$$

Łączna wartość opłat dodatkowych wynosi (jak poprzednio) Sp, bo $G = \sum_{j=1}^{N} G_j = S\frac{q-1}{q^N-1}p(1+q+\cdots+q^{N-1}) = Sp$. Ostatecznie:

$$\tilde{A}_n = A_n + G_n = S\frac{q-1}{q^N-1}(q^N + pq^{n-1}).$$

Przykład Dług 10000 zł należy spłacić w 5. równych płatnościach rocznych. Kapitalizacja jest złożona roczna, stopa procentowa $r = 15\%$. Ponadto prowizja p wynosi 3%. Ułożyć plan spłaty.
Bez uwzględnienia prowizji rata wynosiłaby:

$$A = Sq^N \frac{q-1}{q^n-1} = 10000 \cdot 1,15^5 \frac{0,15}{1,15^5-1} \approx 2983,16.$$

Do obliczenia prowizji stosujemy wzór $G_n = Sq^{n-1}\frac{q-1}{q^N-1}p$
Otrzymujemy tabelę:

n	S_{n-1}	Z_n	A_n	T_n	G_n	$\tilde{A}_n$	S_n
1	10000	1500	2983,16	1483,16	44,49	3027,65	8516,84
2	8516,84	1277,53	2983,16	1705,63	51,17	3034,32	6811,22
3	6811,22	1021,68	2983,16	1961,47	58,84	3042,00	4849,74
4	4849,74	727,46	2983,16	2255,69	67,67	3050,83	2594,05
5	2594,05	389,11	2983,16	2594,05	77,82	3060,98	0,00
$\sum$	—	4915,78	—	10000	300	—	—

8. Długi z okresem karencji

Karencją nazywamy wynegocjowaną zwłokę spłaty długu. Może ona dotyczyć rat łącznych lub tylko rat kapitałowych.

Jeżeli karencja obejmuje tylko raty kapitałowe, to w okresie karencji należy spłacać odsetki (Sr za każdy okres). Wtedy na początku okresu spłat dług wynosi S. Jeżeli karencja obejmuje także odsetki, to dług wzrasta do Sq^l.
Przykład Ułożyć w postaci tabeli plan spłaty długu w wysokości 500 j.p. w 5. równych płatnościach rocznych, z 2-letnią karencją obejmującą: a)raty kapitałowe; b) raty łączne. Roczna stopa 10%, kapitalizacja roczna.
a) W pierwszych dwóch latach spłacamy tylko odsetki w wysokości 50 j.p. rocznie. Stan zadłużenia po dwóch latach będzie wynosił 500 j.p. i od tej wysokości obliczamy raty łączne.

$$A = \frac{500 \cdot 0,1}{1-1,1^{-5}} \approx 131,90.$$

n	S_{n-1}	Z_n	A_n	T_n	S_n
1	500	50	50	0	500
2	500	50	50	0	500
3	500	50	131,90	81,9	418,1
4	418,1	41,8	131,9	90,1	328
5	328	32,8	131,9	99,1	228,9
6	228,9	22,9	131,9	109,0	119,9
7	119,9	12	131,9	119,9	0
$\sum$	—	259,5	759,5	500	—

b) W pierwszych dwóch latach nie spłacamy nic. Stan zadłużenia po dwóch latach będzie wynosił $500 \cdot 1,1^2 = 605$ j.p. i od tej wysokości obliczamy raty łączne (dla 5 lat).

$$A = \frac{605 \cdot 0,1}{1-1,1^{-5}} \approx 159,6.$$

n	S_{n-1}	Z_n	A_n	T_n	S_n
1	500	50	0	-50	550
2	550	55	0	-55	605
3	605	60,5	159,6	99,1	505,9
4	505,9	50,59	159,6	109,01	396,89
5	396,89	39,69	159,6	119,91	276,98
6	276,98	27,7	159,6	131,9	145,08
7	145,08	14,51	159,6	145,09	0
$\sum$	—	298	798	500	—

Konwersją długu nazywamy zmianę warunków spłaty długu. Może ona dotyczyć np. liczby rat lub częstości ich spłat, najczęściej jednak dotyczy wysokości stopy procentowej.
Jeżeli dłużnik ma kilka zobowiązań wobec tego samego wierzyciela, to może uzgodnić łączne ich spłacanie. Łączenie długów nazywamy *konsolidacją długów* lub *restrukturyzacją zadłużenia*. Celem konsolidacji jest zmniejszenie kosztów obsługi zadłużenia. Konsolidację przeprowadza się tak, że najpierw wyznaczamy aktualną łączną wartość zadłużenia, a następnie rozliczamy tę kwotę według wynegocjowanych warunków.
Konwersja (lub konsolidacja) technicznie sprowadza się do jednorazowej spłaty długu (długów) środkami uzyskanymi na ten cel w drodze zaciągnięcia kredytu z inną stopą procentową. Matematycznie jest to zmiana stopy procentowej dla długu bieżącego. W umowach określa się karną opłatę za zmianę stopy procentowej przed terminem renegocjacji.
Załóżmy, że dług spłacany jest w równych ratach oraz karna opłata to $\hat{\alpha}$-krotność raty sprzed konwersji, a dłużnik występuje z wnioskiem o renegocjację stopy procentowej bezpośrednio po zapłaceniu n-tej raty. Niech α oznacza krotność raty określającą karną opłatę, przy której nowe raty $\tilde{A}$ są równe starym ratom A. Parametr α można interpretować jako próg opłacalności konwersji długu. Mamy dług bieżący + opłata karna $= \frac{S}{a_{\overline{N}|r}} a_{\overline{N-n}|r} + \alpha \frac{S}{a_{\overline{N}|r}}$.
Raty w wysokości $\tilde{A}$ mają amortyzować tę kwotę (dla nowej stopy $\tilde{r}$), więc

$$\tilde{A} = \frac{S}{a_{\overline{N}|r}} (a_{\overline{N-n}|r} + \alpha) \frac{1}{a_{\overline{N-n}|\tilde{r}}} = A(a_{\overline{N-n}|r} + \alpha) \frac{1}{a_{\overline{N-n}|\tilde{r}}}.$$

Jeśli $\tilde{A} = A$, to $\alpha = a_{\overline{N-n}|\tilde{r}} - a_{\overline{N-n}|r}$.

Wniosek 1. *Próg opłacalności konwersji długu jest równy różnicy wartości aktualnych (w momencie n) rent jednostkowych płatnych przez $N-n$ okresów przy stopach procentowych równych odpowiednio $\tilde{r}$ i r.*

Przykład Dług 50000 zł spłacany jest w 20 rocznych ratach równych przy stopie 10%. W umowie zastrzeżono możliwość renegocjacji stopy procentowej po 5 latach i ustalono opłatę karną w wysokości 1 raty. Czy redukcja stopy procentowej do 8% jest opłacalna dla dłużnika?
I sposób (bezpośredni):
Obliczamy ratę $A = \frac{50000 \cdot 0,1}{1-1,1^{-20}} = 5872,98$. Po 5. latach dług będzie wynosił $S_5 = 50000\frac{1,1^{20}-1,1^5}{1,1^{20}-1} = 44670,36$. Dodając opłatę karną otrzymamy 50543,34. Od tej kwoty należy obliczyć nową ratę łączną dla 15 rat i stopy 8%. Otrzymamy $A' =$

$\frac{44670,36 \cdot 0,08}{1-1,08^{-15}} = 5904,95$. Rata jest większa niż poprzednio, więc renegocjacja jest nieopłacalna.
II sposób:
Obliczamy próg opłacalności

$$\alpha = a_{\overline{15}|0,08} - a_{\overline{15}|0,1} = \frac{1-(1,08)^{-15}}{0,08} - \frac{1-(1,1)^{-15}}{0,1} = 0,95.$$

Opłata karna jest większa niż próg opłacalności, więc konwersja jest nieopłacalna.

9. Rzeczywista stopa procentowa

Obowiązująca od 2002 roku ustawa o kredycie konsumenckim nakłada na instytucje udzielające kredytów obowiązek podawania rzeczywistej rocznej stopy procentowej (RRSO). Ustawa podaje wzór obliczania tej stopy: jest to stopa r dla której zachodzi równość

$$\sum_{\alpha=1}^{a} A_\alpha (1+r)^{-t_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{b} B_\beta (1+r)^{-t_\beta}$$

gdzie A_α są to płatności dłużnika na rzecz wierzyciela, a B_β są to płatności wierzyciela na rzecz dłużnika. Natomiast t_α, t_β są to momenty płatności.
Prościej: RRSO to taka stopa, dla której suma wszystkich zdyskontowanych płatności jest równa sumie wszystkich zdyskontowanych należności.
Przykład Kredyt hipoteczny w wysokości 300 000 jp ma być spłacony w ciągu 30 lat w równych ratach miesięcznych przy rocznej stopie procentowej 6% z miesięczną kapitalizacją odsetek. Opłata wstępna wynosi 100 zł (jednorazowo), prowizja za udzielenie kredytu wynosi 20 zł miesięcznie, koszt ubezpieczenia kredytu 30 zł miesięcznie. Obliczyć RRSO tego kredytu.
Rozwiązanie. Rata łączna wynosi (przy stopie miesięcznej 0,05%):

$$A = \frac{Sr}{1-v^N} = \frac{300000 \cdot 0,005,}{1-(1,005)^{360}} = 1798,65.$$

Doliczamy prowizję i ubezpieczenie. Wynik: 1848,65.
Stopę R obliczamy z równości

$$300000 = 100 + 1848,65 \sum_{j=1}^{360} (1+R)^{-\frac{j}{12}} = 100 + 1848,65 \frac{1-(1+R)^{-30}}{(1+R)^{\frac{1}{12}}-1}.$$

Wynik: $R = 6,44\%$.
Zadanie (egzamin dla aktuariuszy, 17.06.00 zad.3) Na okres 10 lat została zaciągnięta pożyczka, którą pożyczkobiorca spłacił równymi ratami płatnymi na koniec każdego roku. Ile wynosi całkowita kwota spłaconych odsetek jeżeli:
- kapitał spłacony w pierwszych trzech ratach wyniósł 1253 zł
- kapitał spłacony w ostatnich trzech ratach wyniósł 1763 zł
Odpowiedź (podaj najbliższą wartość): 1425 zł; 1475 zł; 1500 zł; 1550 zł; 1575 zł.
Rozwiązanie. S — pożyczka, i —stopa, S_n — dług bieżący.
$S = X \cdot a_{\overline{10}|i}$,
$S_3 = S - 1253 = X \cdot a_{\overline{7}|i}$,
$S_7 = 1763 = X \cdot a_{\overline{3}|i}$.

Szukane jest $Z = 10X - S = 10\frac{S}{a_{\overline{10}|i}} - S$.
Dzieląc równania: I/III i II/III mamy

$$S = 1763\frac{a_{\overline{10}|}}{a_{\overline{3}|}} \text{ oraz } S = 1253 + 1763\frac{a_{\overline{7}|}}{a_{\overline{3}|}}$$

Przyrównując mamy

$$1763\frac{a_{\overline{10}|} - a_{\overline{7}|}}{a_{\overline{3}|}} = 1253$$

ale $\frac{a_{\overline{10}|}-a_{\overline{7}|}}{a_{\overline{3}|}} = v^7$, więc $v^7 = \frac{1253}{1763}$,
skąd $1 + i = \sqrt[7]{\frac{1763}{1253}}$, (czyli $i = 4,999\%$).
Zatem

$$Z = S(\frac{10}{a_{\overline{10}|i}} - 1) = 1763\frac{a_{\overline{10}|}}{a_{\overline{3}|}}(\frac{10}{a_{\overline{10}|i}} - 1) = 1763\frac{10 - a_{\overline{10}|}}{a_{\overline{3}|}} = 1474,7.$$

Uwaga. Wyżej wykorzystaliśmy łatwą do sprawdzenia zależność:

$$\frac{a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{m}|}} = v^n$$

Zadanie (egzamin dla aktuariuszy, 17.06.00 zad.6)
Pożyczka jest spłacana za pomocą 10 malejących spłat na końcu każdego okresu odpowiednio w wysokości 20, 19, 18, 17, 16,...11 dokonywanych na końcu każdego roku. Znajdź wysokość oprocentowania zapłaconego w piątej spłacie.
Odpowiedź (wybierz):
$17 - 11 \cdot v^6 - \ddot{a}_{\overline{6}|}$;
$17 - 11 \cdot v^6 - a_{\overline{6}|}$;
$16 - 11 \cdot v^6 - a_{\overline{6}|}$;
$16 - 11 \cdot v^6 - \ddot{a}_{\overline{6}|}$;
żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.
Rozwiązanie.

$$S_9 = 11v, \quad S_8 = 12v + 11v^2, \ \ldots, \ S_4 = 16v + \cdots + 11v^6.$$

Szukane jest

$$\begin{aligned} iS_4 &= i(16v + 15v^2 + \cdots + 11v^6) = \\ &= i[16a_{\overline{6}|} - (v^2 + 2v^3 + 3v^4 + 4v^5 + 5v^6)] = \\ &= i[16a_{\overline{6}|} - v(Ia)_{\overline{5}|}] = i[16a_{\overline{6}|} - v\frac{\ddot{a}_{\overline{5}|} - 5v^5}{i}] = \\ &= 16 - 11v^6 - v\ddot{a}_{\overline{5}|} = 16 - 11v^6 - a_{\overline{5}|}. \end{aligned}$$