

Laboratorium 1. Rozwiązać, korzystając z platformy WolframAlpha.

1. Wielomian $2x^5 - 19x^4 + 58x^3 - 67x^2 + 56x - 48$

- a) rozłożyć na czynniki nad ciałami \mathbb{R} , \mathbb{C} , $GF(2)$, $GF(3)$, $GF(5)$;
b) przedstawić w postaci sumy potęg $x - 1$.

2. Czy macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

jest diagonalizowalna (tzn. czy jest podobna do macierzy diagonalnej)?

3. Znajdź zbiór rozwiązań układu

- a) równań $x + y + z = 10$, $x - y - 3z = 4$, $2x + z = 5$;
b) nierówności $x + y \leq 10$, $x - y \geq 4$, $x > 0$, $y \geq 1$.

4. Znajdź zbiór rozwiązań układu nierówności stosując polecenie "plot":
 $-x - y \leq -4$, $-x + 2y < 8$, $-x + y < 3$, $x > 2$, $y > 0$.

5. Znajdź 16^{-1} w ciele \mathbb{Z}_{37} .

6.a) Rozwiązać układ kongruencji:

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{13}, \\ x &\equiv 4 \pmod{37}. \end{aligned}$$

b) Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną x , która daje reszty 3, 2, 1 przy dzieleniu przez 5, 7, 9 odpowiednio.

7. Dla funkcji $y = \frac{x^4}{2-x^3}$ znaleźć

- a) ekstrema i przedziały monotoniczności
b) przedziały wypukłości i punkty przegięcia
c) asymptoty
d) rozwinięcie w szereg Maclaurina
e) przedstawienie w postaci sumy wielomianu i ułamków prostych
f) całkę nieoznaczoną
g) całkę oznaczoną od 0 do 1
h) dziesiątą pochodną

8. Obliczyć pole między krzywymi $y = \sqrt{9 - x^2}$ i $y = x^2$.

9. Obliczyć długość łuku krzywej $y = \ln(x)$, $1 \leq x \leq 2$.

10. Szybkość z jaką stygnie ciało jest proporcjonalna do różnicy temperatur pomiędzy tym ciałem a otoczeniem (*prawo stygnięcia Newtona*).

Szklanka herbaty o temperaturze 100 stopni znajduje się w pokoju o temperaturze 20 stopni. Po 10 minutach temperatura obniża się do 80 stopni. Po jakim czasie herbata będzie miała temperaturę 40 stopni?

11. Znaleźć zależność między prędkością v ciała swobodnie spadającego i czasem t , przyjmując, że opór powietrza jest wprost proporcjonalny do kwadratu prędkości.

Wsk. Zastosować drugą zasadę dynamiki ("Newton's second law")

12. Student zarażony grypą wraca do kampusu, w którym mieszka 1000 studentów. Załóżmy, że prędkość rozprzestrzeniania się wirusa jest proporcjonalna do liczby N już zarażonych, ale także do liczby $1000 - N$ zdrowych (możliwych do zarażenia). Zaobserwowano, że po 4 dniach chorowało 50 studentów. Ilu będzie chorych po 6 dniach?

Wsk. Zastosować równanie logistyczne.

13. Obliczyć $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^3 dla permutacji:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 4 & 2 & 8 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 3 & 6 & 1 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

14. a) Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $(1, 3, 2)$, $(-2, 4, 1)$, $(1, 1, 3)$.

b) Wyznaczyć odległość punktu $(1, 1, 0)$ od tej płaszczyzny.

c) Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez pierwsze dwa punkty.

15. Znaleźć rzut punktu $(2, 5, 7)$ na płaszczyznę $x - 2y + z = 0$.

Wsk.: sformułować np. tak: minimize $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 + (z - 7)^2$ if $x - 2y + z = 0$.

16. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji $u = xyz$ gdy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i $x + y + z = 0$.

17. Pomiary pewnej wielkości w momentach czasu 1, 2, 3, 4 dały wyniki 2, 4, 5, 7.

a) Metodą najmniejszych kwadratów znaleźć równanie prostej, która najlepiej przybliża te dane.

b) Znaleźć wielomian stopnia 3 określony przez te dane.

Niżej przydatne będą terminy: *present value*, *future value*, *interest rate*, *interest periods*, *compounding frequency* (*compounded monthly*, *daily*, *continuously*,...).

Także: *mortgage*, *loan period*, *principal paid*, *(total) interest paid*, *total payments*.

18. Obliczyć wartość kwoty 10000 zł po 5. latach, jeżeli stopa roczna wynosi 3% i jest kapitalizowana miesięcznie.

Wsk.: monthly interest PV=10000, rate=3%, 5 years

19. Jaką kwotę powinniśmy złożyć w banku oferującym stopę 3%, kapitalizowaną miesięcznie, jeżeli po 4. latach chcemy mieć 100 000 zł?

Wsk.: future value 100000, 3% compounded monthly, 4 years

20. Oblicz miesięczną ratę kredytu 100 000 zł zaciągniętego na 10 lat przy stopie 8%. Jaka będzie łączna kwota odsetek? Jaka jest efektywna stopa procentowa?

Wsk.: mortgage 100000, 8%, 10 years