Maciej Grzesiak
Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej

Oprocentowanie, dyskonto, inflacja

1. Wstęp

Zastosowania matematyki w ekonomii obejmują cały szereg zagadnień, poczynając od prostych operacji arytmetycznych. Dzięki matematyce ekonomiści są w stanie opisywać złożone zjawiska i formułować hipotezy i modele podlegające weryfikacji. Znaczna część wiedzy ekonomicznej ma postać rozmaitych modeli, w których występują w miarę jasno sprecyzowane założenia, z których przy pomocy pojęć i metod matematycznych otrzymuje się wnioski.
Wykorzystywane dziedziny matematyczne, to oprócz arytmetyki statystyka matematyczna, rachunek różniczkowy (będący podstawą tzw. rachunku marginalnego), algebra liniowa (w szczególności tzw. model Leontiewa posługujący się macierzami wejścia i wyjścia). Do algebry można zaliczyć także programowanie liniowe, będące teorią opisującą problem minimalizacji lub maksymalizacji funkcji liniowej na zbiorze określonym przez układ warunków liniowych (tj. równań lub nierówności liniowych).
Jest wreszcie cały szereg metod związanych z finansami i ubezpieczeniami.
Termin *matematyka finansowa* pojawił się w 1946 roku jako tytuł książki Richardsona *Financial Mathematics*. Współcześnie tą nazwą obejmuje się:
— arytmetykę finansową (problemy związane z oprocentowaniem i dyskontowaniem, w szczególności plany spłaty kredytów);
— matematykę ubezpieczeń (obliczanie wielkości składki, wielkości rezerw na wypłaty w oparciu o probabilistyczne modele i statystyki umieralności, czy wypadkowości);
— wycenę papierów wartościowych (akcji, obligacji, instrumentów pochodnych).
Są w matematyce finansowej miejsca wymagające zaawansowanej wiedzy matematycznej — teorii procesów stochastycznych, metody analizy danych, równań różniczkowych. Obecnie jest to jednak dział matematyki stosowanej, który w zasadzie nie wnosi nowych idei matematycznych, a raczej tylko korzysta z dorobku innych dziedzin matematyki. Warto jednak wspomnieć, że specjalizacja w tej dziedzinie jest dla matematyka szansą uzyskania nagrody Nobla (z ekonomii). Są liczne przykłady.
Specjalistów od matematyki ubezpieczeń nazywamy *aktuariuszami*. Odpowiadają oni za kalkulację składek i rezerw firmy ubezpieczeniowej. W krajach zachodnich jest to całkiem spora grupa zawodowa — np. w USA ok. 15 000. W Polsce jest obecnie kilkuset aktuariuszy. Aby zostać aktuariuszem trzeba ukończyć studia wyższe — matematykę lub ekonomię, a następnie zdać egzamin państwowy, który Ministerstwo Finansów organizuje mniej więcej raz w roku. Egzamin jest czteroczęściowy i obejmuje:
— matematykę finansową;
— matematykę ubezpieczeń życiowych;
— matematykę ubezpieczeń majątkowych;
— prawdopodobieństwo i statystykę.

2. Wartość pieniądza jako funkcja czasu

Pieniądz zmienia swoją wartość wraz z upływem czasu. Zmiany te wynikają z rozmaitych przyczyn. Np. pieniądz zmienia swoją wartość przy denominacji, ale tym nie będziemy się zajmować. Również nie będziemy się zajmować inflacją — w istocie w większości rozważań zakłada się inflację zerową. Będzie nas głównie interesować zmiana realnej wartości pieniądza będąca skutkiem rozwoju gospodarki. Pieniądz jest ekwiwalentem towaru czy usługi — możemy wymieniać jedno na drugie. Jeśli towarów przybywa, to pieniądz zwiększa swoją wartość, bo staje się ekwiwalentem większej niż przedtem ilości produktów.

Wyrazem zmiany wartości pieniądza w czasie są zmiany wartości konta bankowego. Jeżeli do banku wpłacamy kwotę K_0 nazywaną *wartością początkową* lub *teraźniejszą* (ang. *present value*, PV), to po pewnym okresie (miesiąc, kwartał, rok) przyjmuje ona wartość K_1 nazywaną *wartością końcową* lub *przyszłą* (ang. *future value*, FV). Różnicę $Z = K_1 - K_0$ nazywamy *odsetkami* (ang. *interest*). Odsetki wyrażamy w jednostkach pieniężnych. Są one formą zapłaty banku za udzielenie przez właściciela kapitału prawa dysponowania daną kwotą. Bank nie płaci właścicielowi bezinteresownie, liczy bowiem, że te pieniądze zainwestowane w jakieś przedsięwzięcie, czy pożyczone komuś w formie kredytu przyniosą mu dochód większy niż odsetki, które wypłaci właścicielowi pieniędzy.

Odsetki zależą zarówno od okresu, na jaki została wpłacona dana kwota, jak i od wielkości tej kwoty. Konieczny jest więc obiektywny wskaźnik umożliwiający porównanie warunków oferowanych przez różne banki. Tym wskaźnikiem jest *stopa procentowa* (ang. *interest rate*) oznaczana literą r. Określamy ją jako stosunek odsetek do wartości początkowej:

$$r = \frac{Z}{K_0} = \frac{K_1 - K_0}{K_0}.$$

Jest to więc liczba niemianowana, np. $r = 0,1$. Można ją wyrażać w procentach, mnożąc przez 100%. Zapisy: $r = 0,1$ i $r = 10\%$ są równoważne. Jednak we wszystkich wzorach należy traktować r jako liczbę niemianowaną.

Mamy więc zależności:

$$Z = K_0 r, \ K_1 = K_0(1 + r).$$

W określeniu r nie występuje czas, ale przecież musimy go uwzględniać. Robimy to mówiąc o *stopie rocznej, kwartalnej, miesięcznej*, czy jednodniowej. Przedział czasu, którego stopa dotyczy nazywamy *okresem stopy procentowej.*

Wyjaśnimy pewne pojęcia.

Oprocentowaniem nazywamy wyznaczanie odsetek. Odsetki mogą być wypłacone na końcu okresu wypożyczenia (oprocentowanie *z dołu*) lub na początku (oprocentowanie *z góry*).

Przykład Jeżeli stopa roczna wynosi 13%, to osoba wpłacająca do banku 100 zł otrzyma

— przy oprocentowaniu z dołu — za rok kwotę 113 zł;

— przy oprocentowaniu z góry — od razu kwotę 13 zł, i za rok 100 zł.

Kapitalizacja jest to dopisywanie odsetek do kapitału. Czas, po którym dopisuje się odsetki nazywamy *okresem kapitalizacji.* Okres ten może być równy okresowi stopy procentowej (mówimy wtedy o kapitalizacji *zgodnej*) lub inny (kapitalizacja *niezgodna*). Po kapitalizacji wartość przyszła staje się wartością teraźniejszą. Jeśli kapitalizacji podlega tylko kapitał początkowy, to nazywamy ją *prostą.* W tym modelu odsetki nie podlegają oprocentowaniu. Jeśli oprocentowaniu podlega cała zgromadzona do tej pory kwota, to nazywamy ją *złożoną.* Oprocentowaniu podlega więc i kapitał początkowy, i nagromadzone odsetki.

Reasumując, stopę procentową podaje się zawsze w związku z *podstawowym okresem czasu*, np. można mówić o stopie rocznej 6%. Trzeba także podać *okres kapitalizacji (konwersji)* — jest to przedział czasowy na końcu którego dopisuje się odsetki.

Stopa procentowa nazywa się *efektywną* jeśli jej okres pokrywa się z okresem konwersji — oznacza to, że odsetki dopisuje się na koniec okresu podstawowego.

Zadanie. Niech r oznacza efektywną roczną stopę procentową. Rozważmy rachunek, na który wpłacono K_0 j.p. i na który na koniec okresu (roku) i wpłaca się dodatkowo kwotę p_i. Jaki jest stan rachunku po n latach?

Niech K_i będzie stanem na koniec roku i (łącznie z płatnością p_i). Odsetki za rok poprzedni wynoszą rK_{i-1}, więc

$$K_i = K_{i-1} + rK_{i-1} + p_i. \tag{1}$$

Ten wzór rekurencyjny można przepisać w postaci:

$$K_i - (1+r)K_{i-1} = p_i.$$

Pomnóżmy to równanie przez $(1+r)^{n-i}$:

$$(1+r)^{n-i}K_i - (1+r)^{n-i+1}K_{i-1} = (1+r)^{n-i}p_i.$$

Stąd

$$\sum_{i=1}^{n}(1+r)^{n-i}K_i - \sum_{i=1}^{n}(1+r)^{n-i+1}K_{i-1} = \sum_{i=1}^{n}(1+r)^{n-i}p_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}(1+r)^{n-i}K_i + (1+r)^0K_n - \sum_{i=1}^{n-1}(1+r)^{n-i}K_i - (1+r)^nK_0 = \sum_{i=1}^{n}(1+r)^{n-i}p_i,$$

czyli

$$K_n = (1+r)^nK_0 + \sum_{i=1}^{n}(1+r)^{n-i}p_i.$$

Potęgi $(1+r)$ nazywamy *czynnikami pomnażającymi.* Początkowy kapitał K po h latach wynosi $(1+r)^hK$.

Przykład Jaką wartość osiągnie kapitał 1000 zł przy oprocentowaniu złożonym rocznym przy stopie 6% po 3. latach?
Odp.: $K_3 = (1+0,06)^3 1000 = 1191,02$
Jeżeli wzór (1) napiszemy w postaci

$$K_i - K_{i-1} = rK_{i-1} + p_i$$

i zsumujemy po i, to otrzymamy

$$K_n - K_0 = \sum_{i=1}^{n} rK_{i-1} + \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Zatem przyrost wartości jest sumą wszystkich odsetek i wszystkich wpłat.

3. Stopy nominalne

Jeżeli okres konwersji nie pokrywa się z okresem podstawowym, to mówimy o kapitalizacji niezgodnej. Stopa procentowa nazywa się wtedy stopą *nominalną.* Przykładowo, stopa roczna 6% z kwartalnym okresem konwersji oznacza, że co trzy miesiące do rachunku dopisuje się $1,5\%$ kapitału. Oznacza to, że początkowy kapitał 1 wzrasta do $(1,015)^4 = 1,06136$ na koniec roku. Inaczej, nominalna stopa 6% z okresem kapitalizacji 3 miesiące jest równoważna efektywnej stopie 6,136%.
Niech r będzie daną roczną efektywną stopą procentową. Określamy $r^{(m)}$ jako stopę nominalną kapitalizowaną m razy w roku, równoważną stopie r. Z równości czynników pomnażających mamy

$$\left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + r,$$

skąd

$$r^{(m)} = m[(1+r)^{\frac{1}{m}} - 1].$$

W granicy, gdy $m \to \infty$ otrzymujemy kapitalizację ciągłą. Niech

$$\delta = \lim_{m \to \infty} r^{(m)}.$$

Liczbę δ nazywamy *intensywnością (natężeniem) oprocentowania* równoważną stopie r. Ponieważ

$$r^{(m)} = \frac{(1+r)^{\frac{1}{m}} - (1+r)^0}{\frac{1}{m}}, \tag{2}$$

więc

$$\begin{aligned} \delta &= \lim_{m \to \infty} r^{(m)} = \lim_{m \to \infty} \frac{(1+r)^{\frac{1}{m}} - (1+r)^0}{\frac{1}{m}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+r)^{\Delta x} - (1+r)^0}{\Delta x} = \\ &= \frac{d}{dx}((1+r)^x)_{x=0} = [(1+r)^x \cdot \ln(1+r)]_{x=0} = \ln(1+r), \end{aligned}$$

lub

$$e^{\delta} = 1 + r.$$

Zatem czynnik pomnażający dla okresu h lat wynosi $(1+r)^h = e^{\delta h}$ (h może być dowolną liczbą rzeczywistą).
Można uzasadnić, że $r^{(m)}$ jest malejącą funkcją m, gdyż ze wzoru (2) wynika, że $r^{(m)}$ można interpretować jako współczynnik kierunkowy siecznej do krzywej $(1+r)^x$. Ponieważ ta krzywa jest wypukła, więc gdy $x \to 0$ (tj. $m \to \infty$), to współczynnik kierunkowy maleje. Mamy więc nierówności:

$$\delta < \ldots < r^{(12)} < \ldots < r^{(2)} < r$$

Przykład liczbowy dla $r = 6\%$:

m	$r^{(m)}$
1	0,06000
2	0,05913
3	0,05884
4	0,05870
6	0,05855
12	0,05841
∞	0,05827

Uwaga. Stopa efektywna dla stopy nominalnej kapitalizowanej m razy w roku wynosi

$$r_{\text{ef}} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1,$$

a w granicy, gdy $m \to \infty$, $r_{\text{ef}} = e^r - 1$.

4. Wpłaty ciągłe

Rozważmy rachunek, na który dokonywane są wpłaty ciągłe w wysokości $p(t)$. Zatem wpłaty na rachunek dla małego przedziału czasu od t do $t + dt$ wynoszą $p(t)dt$. Niech $K(t)$ oznacza stan rachunku w chwili t. Załóżmy, że odsetki są również dopisywane w sposób ciągły z intensywnością oprocentowania $\delta(t)$ (może ona zależeć od czasu t). Wtedy kwota odsetek w przedziale $[t, t + dt]$ wynosi $K(t)\delta(t)dt$. Całkowity przyrost kapitału w tym przedziale jest więc równy

$$dK(t) = K(t)\delta(t)dt + p(t)dt.$$

Otrzymujemy równanie liniowe

$$K'(t) = K(t)\delta(t) + p(t).$$

Przepiszmy je w postaci

$$e^{-\int_0^t \delta(s)ds} K'(t) - e^{-\int_0^t \delta(s)ds} K(t)\delta(t) = e^{-\int_0^t \delta(s)ds} p(t).$$

czyli

$$\frac{d}{dt}[e^{-\int_0^t \delta(s)ds} K(t)] = e^{-\int_0^t \delta(s)ds} p(t).$$

Całkujemy od 0 do h:

$$e^{-\int_0^h \delta(s)ds} K(h) - K(0) = \int_0^h e^{-\int_0^t \delta(s)ds} p(t)dt.$$

Stąd

$$K(h) - e^{\int_0^h \delta(s)ds} K(0) = \int_0^h e^{\int_0^h \delta(s)ds} \cdot e^{-\int_0^t \delta(s)ds} p(t)dt,$$

więc

$$K(h) = e^{\int_0^h \delta(s)ds} K(0) + \int_0^h e^{\int_t^h \delta(s)ds} p(t)dt.$$

Szczególne przypadki:
1) Jeżeli w chwili $t = 0$ wpłacamy kwotę $K(0)$, a potem nic więcej (tzn $p(t) = 0$), to

$$K(h) = e^{\int_0^h \delta(s)ds} K(0).$$

Tyle wynosi zakumulowana wartość wpłaty $K(0)$.
2) Jeżeli $\delta(t) = \delta$ (stała intensywność oprocentowania), to

$$K(h) = e^{\delta h} K(0) + e^{\delta h} \int_0^h e^{-\delta t} p(t)dt.$$

5. Czas bankowy

Ponieważ banki posługują się na ogół rocznymi stopami procentowymi, podstawowe znaczenie mają dwie (wydawałoby się proste) operacje:
— obliczenie ile jest dni między dwiema ustalonymi datami
— zamiana liczby dni na liczbę lat.
Otóż w praktyce bankowej, a także w matematyce finansowej oprócz "zwykłego" czasu kalendarzowego występuje *czas bankowy.* Jednostkami tego czasu są: *rok bankowy* o długości 360 dni oraz *miesiąc bankowy* o długości 30 dni.
Przyjmujemy oznaczenia:

t_K – dokładna liczba dni (według czasu kalendarzowego),
t_B – bankowa liczba dni (według czasu bankowego),
n_K – liczba lat kalendarzowych,
n_B – liczba lat bankowych.

Np. między 13 marca i 17 czerwca jest 96 (18+30+31+17) dni kalendarzowych, ale tylko 94 (17+30+30+17) dni bankowych.
Przeliczając na lata otrzymujemy: $n_K = \frac{96}{365} = 0,2630$ i $n_B = \frac{94}{360} = 0,2611$.
Możliwe są więc cztery warianty obliczania dni i lat: (n_K, t_K), (n_K, t_B), (n_B, t_K), (n_B, t_B). Banki najchętniej stosują wariant (n_B, t_K), tzn. rachunek dni według czasu kalendarzowego i rachunek lat według czasu bankowego. Jest to bowiem wariant najkorzystniejszy dla wierzyciela (a głównie w takiej roli występują banki). Nie wszystko jednak od nich zależy. Ustawa o kredycie konsumenckim (dotycząca kredytów do wysokości 80000 zł, ale nie hipotecznych) narzuca bankom wzór obliczania stopy procentowej według reguły (n_K, t_K).

6. Metoda liczb procentowych

Stosuje się ją w przypadku kapitalizacji prostej przy oprocentowaniu konta z często zmieniającym się wkładem (np. a'vista).
Niech r będzie roczną stopą procentową. Przyszła wartość kwoty K_0 po t dniach oprocentowania wynosi

$$K_t = K_0(1 + t\frac{r}{360}),$$

a odsetki za ten okres

$$Z_t = K_0 t\frac{r}{360}.$$

Czynnik $K_0 t$ to *liczba procentowa*, a $\frac{360}{r}$ to *dzielnik procentowy.*
Przyjmijmy, że na rachunku bankowym dokonano N operacji bankowych — wpłat (+) i wypłat (-). Wysokość kwoty i-tej operacji oznaczamy S_i. Niech t_i oznacza liczbę dni, które upłynęły między dniem dokonania i-tej operacji a dniem rozrachunku t. Przy tych oznaczeniach wartość końcowa, w chwili t, wynosi

$$\begin{aligned} K_t &= S_1(1 + t_1\frac{r}{360}) + S_2(1 + t_2\frac{r}{360}) + \cdots + S_N(1 + t_N\frac{r}{360}) \\ &= \sum_{i=1}^{N} S_i(1 + t_i\frac{r}{360}) = \sum_{i=1}^{N} S_i + \frac{r}{360}\sum_{i=1}^{N} S_i t_i. \end{aligned}$$

Sumę $L = \sum_{i=1}^{N} S_i t_i$ nazywamy *sumaryczną liczbą procentową*. Zatem

$$K_t = \sum_{i=1}^{N} S_i + \frac{r}{360}L.$$

Przykład Na rachunku bankowym dokonano następujących operacji:
1. 1.01.2000 — wpłata 860 zł,
2. 15.02.2000 — wpłata 340 zł,
3. 29.02.2000 — wypłata 600 zł.

Jaką maksymalną kwotę będzie można pobrać z tego rachunku w dniu 29.05, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 9%?

Oper.	Data	Stan k.	Wpłaty	Wypłaty	L. dni	L. proc
1	01.01	860	860	0	150	129000
2	15.02	1200	340	0	105	35700
3	29.02	600	0	-600	90	-54000

Tutaj:

$$L = \sum_{i=1}^{3} S_i t_i = 110700, \quad \frac{r}{360} = 0,00025,$$

a więc odsetki wynoszą

$$Z_t = \frac{r}{360}L = 27,675.$$

Stan konta:

$$K = 600 + 27,675 = 627,675.$$

7. Kapitalizacja złożona z góry, zgodna

Przypomnijmy, że oprocentowanie z góry oznacza, że odsetki są wypłacane na początku okresu kapitalizacji.
Przyszłą wartość kapitału K_0 na początku n-tego okresu kapitalizacji oznaczymy symbolem W_n. Obliczmy W_1: wpłacana kwota K_0 podlega oprocentowaniu z góry dając

odsetki $K_0 r$. Odsetki te, dołączane do kapitału można traktować jako następną wpłatę, która daje odsetki Kr^2, itd. Zatem

$$W_1 = K_0 + K_0 r + K_0 r^2 + \cdots = K_0 \frac{1}{1-r},$$

(o ile $|r| < 1$). Analogicznie:

$$W_{n+1} = W_n \frac{1}{1-r}.$$

Zatem

$$W_n = K_0 \frac{1}{(1-r)^n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Liczbę $\frac{1}{1-r}$ nazywamy *czynnikiem wartości przyszłej* lub *współczynnikiem akumulacji.*
Przykład Ile wynosi roczna stopa procentowa jeżeli przy rocznej stopie złożonej z góry z kapitału 600 j.p. uzyskano po jednym roku wartość 750 j.p.?

$$750 = 600 \cdot \frac{1}{1-r}, \ 1 - r = \frac{60}{75}, \ r = \frac{15}{75} = 0,2.$$

Przykład Ile wynosi roczna stopa procentowa jeżeli przy rocznej stopie złożonej z góry odsetki za drugi rok od kwoty początkowej $K_0 = 400$ j.p. wynoszą 44 j.p.

$$Z_2 = W_2 - W_1 \Rightarrow 44 = 400 \frac{1}{(1-r)^2} - 400 \frac{1}{1-r},$$

stąd

$$r = \frac{1}{11} \approx 0,09.$$

8. Kapitalizacja przy zmiennej stopie procentowej

Załóżmy, że przez n_1 okresów obowiązywała stopa r_1, przez n_2 okresów obowiązywała stopa r_2, itd. Jaka jest przyszła wartość kapitału K_0 po n okresach, gdzie $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$? Zakładamy, że okres stopy procentowej jest zawsze taki sam i równy okresowi kapitalizacji.
Jeżeli obowiązuje model kapitalizacji prostej, to:

$$Z = K_0 n_1 r_1 + K_0 n_2 r_2 + \cdots + K_0 n_p r_p = K_0 \sum_{i=1}^{p} n_i r_i.$$

Zatem wartość przyszła po czasie n:

$$K_n = K_0 + Z = K_0 (1 + \sum_{i=1}^{p} n_i r_i).$$

Dla modelu kapitalizacji złożonej (z dołu, z góry) oraz kapitalizacji ciągłej wartość kapitału po danym okresie staje się wartością początkową dla okresu następnego. Zatem
— dla kapitalizacji złożonej z dołu:

$$K_n = K_0 (1 + r_1)^{n_1} (1 + r_2)^{n_2} \cdots (1 + r_p)^{n_p};$$

— dla kapitalizacji złożonej z góry:

$$W_n = K_0 (1 - r_1)^{-n_1} (1 - r_2)^{-n_2} \cdots (1 - r_p)^{-n_p};$$

— dla kapitalizacji ciągłej:

$$K(n) = K_0 e^{n_1 r_1} e^{n_2 r_2} \cdots e^{n_p r_p} = K_0 e^{\sum_{i=1}^{p} n_i r_i}.$$

W przypadku występowania zmiennej stopy procentowej uzasadnione jest wprowadzenie pojęcia przeciętnej stopy procentowej.

Definicja 1. *Przeciętną stopą procentową nazywamy taką stałą stopę* r_{prz} *dla której przyszła wartość kapitału jest taka sama jak przyszła wartość tego kapitału przy zmieniającej się stopie procentowej.*

Stąd:
— dla modelu kapitalizacji prostej:

$$K_0(1 + nr_{\text{prz}}) = K_0(1 + \sum_{i=1}^{p} n_i r_i),$$

$$r_{\text{prz}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} n_i r_i;$$

— dla modelu kapitalizacji złożonej z dołu:

$$(1 + r_{\text{prz}})^n = (1 + r_1)^{n_1}(1 + r_2)^{n_2} \cdots (1 + r_p)^{n_p},$$

$$r_{\text{prz}} = \sqrt[n]{(1 + r_1)^{n_1}(1 + r_2)^{n_2} \cdots (1 + r_p)^{n_p}} - 1;$$

— dla modelu kapitalizacji złożonej z góry:

$$(1 - r_{\text{prz}})^{-n} = (1 - r_1)^{-n_1}(1 - r_2)^{-n_2} \cdots (1 - r_p)^{-n_p},$$

$$r_{\text{prz}} = 1 - \sqrt[n]{(1 - r_1)^{n_1}(1 - r_2)^{n_2} \cdots (1 - r_p)^{n_p}};$$

— dla modelu kapitalizacji ciągłej:

$$K_0 e^{nr_{\text{prz}}} = K_0 e^{\sum_{i=1}^{p} n_i r_i},$$

$$r_{\text{prz}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} n_i r_i.$$

9. Dyskonto

Do tej pory zakładliśmy, że odsetki dopisuje się na końcu okresu kapitalizacji (z dołu). Czasem odsetki są wypłacane na początku okresu (z góry). Wtedy nazywamy je *dyskontem*, a odpowiadająca stopa nazywa się *stopą dyskontową*.
Niech d będzie roczną stopą dyskontową. Osoba inwestująca kapitał K otrzymuje z góry odsetki równe dK, a kapitał K jest wypłacany na koniec okresu. Inwestując otrzymane odsetki, dK, na tych samych warunkach, otrzymuje się dodatkowe odsetki $Kd \cdot d = Kd^2$ i dodatkowo zainwestowana kwota będzie zwrócona na koniec roku. Reinwestując otrzymane odsetki, Kd^2 otrzymuje się z góry Kd^3, itd. Zatem widzimy, że na koniec okresu inwestor wpłacający kwotę K otrzyma

$$K + Kd + Kd^2 + \cdots = \frac{1}{1-d}K.$$

Równoważną efektywną stopę procentową można obliczyć z równości

$$\frac{1}{1-d} = 1 + r,$$

skąd $d = \frac{r}{1+r}$.

Ten wynik ma prostą interpretację: jeżeli inwestuje się kapitał w wysokości 1, to d (czyli odsetki płatne z góry) jest równe zdyskontowanej wartości odsetek r (płatnych z dołu). Równoważną równość:

$$r = \frac{d}{1-d}$$

interpretujemy tak: odsetki płatne na koniec okresu są zakumulowaną wartością odsetek płatnych na początku okresu.

Niech $d^{(m)}$ będzie równoważną nominalną stopą dyskontową naliczaną m razy w roku. Zatem inwestor otrzymuje $\frac{d^{(m)}}{m}K$ na początku okresu, a kapitał K na koniec. Równość czynników pomnażających dla m-tej części roku wyraża się przez

$$\frac{1}{1-\frac{d^{(m)}}{m}} = 1 + \frac{r^{(m)}}{m} = (1+r)^{\frac{1}{m}},$$

co daje

$$d^{(m)} = m\left(1 - \frac{1}{(1+r)^{\frac{1}{m}}}\right),$$

a także (przypomnijmy, że $r^{(m)} = m\big((1+r)^{\frac{1}{m}} - 1\big)$:

$$d^{(m)} = \frac{r^{(m)}}{1+\frac{r^{(m)}}{m}}.$$

Stąd mamy prosty związek:

$$\frac{1}{d^{(m)}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{r^{(m)}}.$$

Stąd

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \lim_{m\to\infty} r^{(m)} = \delta,$$

co nie powinno dziwić: przy ciągłym naliczaniu odsetek różnica między odsetkami z góry i z dołu znika.

Mamy nierówności:

$$d < \ldots < d^{(2)} < \ldots < d^{(12)} < \delta$$

Przykład Dla $r = 6$:

1	$d^{(m)}$
1	0,05660
2	0,05743
3	0,05771
4	0,05785
6	0,05799
12	0,05813
∞	0,05827

10. Dyskonto handlowe (bankowe, przybliżone)

Dyskonto handlowe, D_H, stosuje się w przypadku korzystania z weksli, czeków, obligacji sprzedawanych z dyskontem. Wartość nominalna papieru wartościowego jest znana i jest to wartość końcowa. Dyskonto handlowe powoduje obniżenie wartości nominalnej do tzw. wartości aktualnej. Dyskonto handlowe jest proporcjonalne do wartości nominalnej danego papieru wartościowego (i czasu, którego dotyczy). Współczynnik proporcjonalności nazywa się *stopą dyskontową*, i ozn. d. Zatem:

$$D_H = W_{\mathrm{nom}} dn$$

gdzie n jest liczbą okresów.
Najczęściej dyskonto handlowe stosuje się w obrocie wekslami. Weksel jest papierem wartościowym stwierdzającym zobowiązanie do zapłacenia pewnej określonej kwoty w określonym terminie. Posiadacz weksla może go sprzedać (zdyskontować) przed terminem w banku komercyjnym. Bank ten może z kolei redyskontować go w banku centralnym. Te operacje związane są z pomniejszeniem wartości weksla o wartość odpowiedniego dyskonta.
Jeżeli d oznacza roczną stopę dyskontową, a n liczbę dni między datą spłaty weksla a datą jego zakupu, to

$$D_H = W_{\text{nom}} \frac{d}{360} n.$$

Odstępujący weksel otrzyma kwotę:

$$W_{\text{akt}} = W_{\text{nom}} - D_H,$$

czyli

$$W_{\text{akt}} = W_{\text{nom}}(1 - \frac{d}{360} n).$$

Dalej n będzie znowu oznaczało liczbę okresów (a nie liczbę dni).
Dyskontowanie handlowe nie jest działaniem odwrotnym do oprocentowania przy tej samej stopie procentowej. Dla oprocentowania prostego mamy:

$$\begin{aligned} K_n - D_H &= K_n - K_n rn = K_n(1 - rn) = K_0(1 + nr)(1 - nr) = \\ &= K_0(1 - n^2 r^2) < K_0 \end{aligned}$$

czyli dodanie odsetek prostych do K_0 daje K_n, ale odjęcie D_H od K_n nie daje K_0.
Stopę procentową r i stopę dyskontową d, dla których dyskonto matematyczne proste jest równe dyskontu handlowemu, nazywamy *stopami równoważnymi*. Obliczmy zależność między nimi:

$$D_H = D_M,$$

$$K_n dn = K_0 rn,$$

$$K_0(1 + nr)d = K_0 r,$$

$$d = \frac{r}{1 + nr}$$

oraz

$$r = \frac{d}{1 - nd}.$$

Stąd wynika, że równoważność stopy procentowej i dyskontowej zależy od liczby okresów n.
Przykład Firma A dostarczyła firmie B towary o wartości 40 000 zł. Firma B zaproponowała uiszczenie zapłaty za dwa miesiące, przy czym za okres zwłoki zobowiązała się zapłacić odsetki proste wg rocznej stopy 16%. Wyrazem przeprowadzonej transakcji był weksel kupiecki. Przeanalizować.
Weksel wystawiony przez B ma wartość nominalną:

$$K = 40000(1 + 2\frac{0,16}{12}) \approx 41066,67.$$

Jeżeli firma A potrzebuje gotówki natychmiast, to przedstawia weksel do dyskonta w banku. Dyskonto handlowe wyznaczone przy stopie dyskontowej równej stopie procentowej wynosi

$$D_H = 41066,67 \cdot \frac{0,16}{12} \cdot 2 \approx 1095,11.$$

Firma A otrzyma

$$W_{\text{akt}} = 41066,67 - 1095,11 = 39971,56.$$

Dyskonto handlowe jest zarobkiem banku.
Przykład W dniu 1 lipca hurtownia A sprzedała towar sklepowi B, przy czym zobowiązanie zapłaty zostało potwierdzone wekslem kupieckim o wartości nominalnej 20 000 zł płatnym 1.09. Hurtownia A zdyskontowała ten weksel w banku 1.08, przy czym stopa dyskontowa wynosiła 20%. Bank zdyskontował ten weksel w NBP dnia 16.08 wg stopy redyskontowej 15%. Wyznaczyć zysk hurtowni A oraz zarobek (marżę) banku na tej transakcji.
W dniu 1.08:

$$W_{\text{akt}} = 20000(1 - \frac{0,2}{360} \cdot 31) \approx 19655,56.$$

Tyle otrzymuje hurtownia A. Jej zysk wiąże się z możliwością zainwestowania tej kwoty na okres jednego miesiąca. Jeżeli stopa zwrotu z tej inwestycji wynosi 2% miesięcznie, to jej wartość wynosi 1.09:

$$W_{\text{akt}}(1 + 0,02) = 20048,67,$$

więc zysk hurtowni wynosi 393,11. Natomiast marża banku komercyjnego jest różnicą wartości aktualnych weksla 16.08 wynikającą z różnicy stóp dyskontowych, czyli:

$$20000(1 - \frac{0,15}{360} \cdot 15) - 20000(1 - \frac{0,2}{360} \cdot 15) = 20000 \cdot \frac{0,2 - 0,15}{360} \cdot 15 = 41,67.$$

11. Inflacja

Inflacja to wzrost ogólnego poziomu cen. Miarą inflacji jest indeks cen dóbr konsumpcyjnych, równy stosunkowi cen dóbr należących do "reprezentatywnego koszyka" w danym okresie czasu cen tych dóbr w okresie bazowym (najczęściej w roku ubiegłym).
Warto pamiętać, że:
— wzrost ceny jednego produktu nie musi prowadzić do inflacji;
— spadek ceny jednego produktu może wystąpić przy istnieniu inflacji;
— okresowe wzrosty cen, takie jak sezonowe wahania cen, nie stanowią zjawisk inflacyjnych.

Czy inflacja jest złem? Wskutek inflacji maleje siła nabywcza pieniądza. Niekoniecznie jednak spada siła nabywcza płacy (wynagrodzenia mogą rosnąć szybciej niż koszty utrzymania). Niemniej inflację należałoby uznać za niekorzystną dla pracowników, bo rekompensata wzrostu poziomu cen nie następuje automatycznie i wymaga często długiej walki. Jednocześnie inflacja zmniejsza wielkość zadłużenia jednostek gospodarujących (osób, przedsiębiorstw). Przykładowo, jeśli pan Kowalski zaczął spłacać kredyt mieszkaniowy w roku 2005 w ratach po 1500 zł miesięcznie, gdy zarabiał 3000 zł, to rata stanowiła 50% jego pensji. Teraz wskutek inflacji i rewaloryzacji pan Kowalski zarabia 4500 zł i rata stanowi 1/3 jego pensji. Zatem jego siła nabywcza się zwiększyła. To może skłaniać przedsiębiorstwa do zwiększenia produkcji i zatrudnienia. Gospodarka może rozwijać się szybciej. Chociaż należy pamiętać, że cena kredytu jest wtedy również wysoka, a to hamuje wzrost inwestycji.
Gdy inflacja postępuje szybko, a szczególnie, gdy jednostki gospodarujące wierzą w jej wzrost, pojawia się zjawisko "ucieczki od pieniądza". Może to mieć bardzo szkodliwe skutki.
Wzrost cen krajowych może także prowadzić do negatywnego skutku w dziedzinie konkurencyjności produktów krajowych, które stają się droższe niż pochodzące z importu.
Podsumowując, inflacja czyni wiele szkody, ale może przynosić pewne korzyści. Redukując zadłużenie może stymulować produkcję i zatrudnienie. Środki stosowane w walce z inflacją (ograniczenia kredytowe) powodują trudności ze zbytem produkcji — przedsiębiorstwa redukują produkcję i zwalniają ludzi.
Przeciwieństwem inflacji jest *deflacja*. Większość ekonomistów uważa, że jest ona gorsza od inflacji, bo powoduje zmniejszenie popytu. Konsumenci, oczekując spadku cen, wstrzymują się z zakupami, a to prowadzi do ograniczania produkcji.

11.1. Przyczyny inflacji

Tradycyjna teoria monetarna[1] opiera się na interpretacji równania

$$MV = PQ$$

gdzie
M — ilość pieniędzy w obiegu,
V — prędkość obiegu pieniądza w danym okresie,
P — cena produktu,
Q — ilość produktu.
Monetaryści zakładają, że Q i V są stałe, zatem jeśli rośnie M, to rośnie i P. Wniosek jest taki, że należy kontrolować M.
Krytycy tej teorii wskazują, że M i Q nie są niezależne. Keynesiści uważają, że wzrost masy pieniężnej M wywiera wpływ na wielkość produkcji Q. Wzrost ilości pieniędzy powoduje wzrost gospodarczy, co przyczynia się zwiększenia zatrudnienia.
Niemonetarystyczne wyjaśnienia inflacji. Na ogół panuje zgoda co do tego, że wzrost ilości pieniądza w obiegu sprzyja inflacji, i że drastyczne ograniczenie ilości pieniądza powoduje zahamowanie wzrostu cen (przy ryzyku powstania bezrobocia). To jednak nie jest czynnik główny. Ponieważ inflacja jest zjawiskiem strukturalnym, należy szukać też takich przyczyn. Marksiści [2] uważają, że inflacja jest odzwierciedleniem stosunku sił i konfliktów przy podziale wytworzonej wartości. Natomiast keynesiści [3] uważają, że inflacja jest przejawem trudności w osiąganiu kompromisów społecznych. Zamiast porozumieć się co do podziału wytworzonej wartości, konkurujące ze sobą grupy społeczne walczą o ten podział starają się zdobyć wpływ na ceny. W krajach zdolnych do konsensusu społecznego stopa inflacji jest na ogół niska.

12. Oprocentowanie z uwzględnieniem inflacji

Niech r będzie stopą procentową, a i stopą inflacji (stopy mają równy okres, z reguły 1 rok). Wtedy kapitał K_0 nominalnie wzrasta do wartości

$$K_1^{\text{nom}} = K_0(1 + r).$$

Jednak rzeczywisty wzrost wartości kapitału jest mniejszy, bo stosunek cen bieżących do cen poprzednich jest większy od 1, bowiem wynosi $1 + i$. Zatem realna wartość kapitału wynosi

$$K_1^{re} = \frac{K_1^{\text{nom}}}{1+i} = K_0\frac{1+r}{1+i}. \tag{3}$$

Stopę rzeczywistego pomnożenia wartości kapitału w tym czasie, czyli realną stopę procentową określa równanie:

$$K_0(1 + r_{re}) = K_0\frac{1+r}{1+i}.$$

skąd $r_{re} = \frac{r-i}{1+i}$. Widać, że stopa realna jest mniejsza niż różnica stopy procentowej i stopy inflacji.

[1] Jej czołowym przedstawicielem był Milton Friedman, 1912–2006

[2] Karol Marks, 1818–1883. Uważał, że trafne wyjaśnienie faktów musi łączyć analizę ekonomiczną i społeczną. Założenie o równości sił między jednostkami gospodarującymi, które przeważa w myśli liberalnej, nie pozwala zdać sprawy z rzeczywistego funkcjonowania naszych społeczeństw, które charakteryzuje ścieranie się antagonistycznych sił.

[3] John Maynard Keynes, 1883–1946. Uważał, że oczekiwany przez przedsiębiorców popyt (nie zaś nominalny poziom płac) jest czynnikiem determinującym poziom zatrudnienia. Jeżeli oczekiwane przez przedsiębiorców zamówienia nie są wystarczające, to wystąpi bezrobocie. Spadek płac nie jest na ogół środkiem prowadzącym do rozwiązania problemu, gdyż powoduje on spadek popytu, skłaniając przedsiębiorstwa do redukcji zatrudnienia.

Powyższe równości dotyczą jednego okresu stopy procentowej. Załóżmy teraz, że kapitał K_0 pomnażał swoją wartość przez n okresów stopy procentowej r, zgodnie z modelem kapitalizacji złożonej z dołu zgodnej. Stopa inflacji mogła się w ciągu tych n okresów zmieniać. Załóżmy, że przez n_1 okresów wynosiła i_1, przez następnych n_2 okresów wynosiła i_2, itd., przy czym $n = \sum_{k=1}^{p} n_k$. W ciągu n okresów poziom cen wzrósł o czynnik $(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\cdots(1+i_p)^{n_p}$, zatem stopa inflacji i wynosi

$$i = (1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\cdots(1+i_p)^{n_p} - 1$$

oraz

$$K_0(1+r_{\mathrm{re}}) = K_0\frac{(1+r)^n}{1+i}.$$

W tym przypadku można mówić o *przeciętnej stopie inflacji*, i_{prz}. Jest to taka stopa inflacji, przy której realna wartość przyszła jest taka sama jak realna wartość przyszła przy zmieniającej się stopie inflacji. Zatem ta stopa określona jest równością:

$$K_0\frac{(1+r)^n}{(1+i_{\mathrm{prz}})^n} = K_0\frac{(1+r)^n}{(1+i_1)^{n_1}\cdots(1+i_p)^{n_p}}$$

skąd

$$i_{\mathrm{prz}} = \sqrt[n]{(1+i_1)^{n_1}\cdots(1+i_p)^{n_p}} - 1.$$

Przykład W ciągu roku stopa inflacji zmieniała się co kwartał i wynosiła kolejno 4%, 3%, 2%, 3%. Wyznaczyć roczną stopę inflacji oraz przeciętną kwartalną stopę inflacji.
$i = 1,04 \cdot 1,03 \cdot 1,02 \cdot 1,03 - 1 = 0,1254 = 12,54\%$,
$i_{\mathrm{prz}} = 0,02998 = 2,998\%$.
Przykład Płaca pracownika w I kwartale wynosiła 1400 j.p. miesięcznie i była indeksowana co kwartał wskaźnikiem wzrostu płac równym 0,8 stopy inflacji z poprzedniego kwartału. W kolejnych kwartałach stopa inflacji była równa odpowiednio 4%, 3%, 1%, 3%. Wyznaczyć:
a) płace w I kwartale następnego roku;
b) roczną stopę inflacji;
c) przeciętną kwartalną stopę inflacji;
d) realną stopę wzrostu płacy pracownika w ciągu roku.
Ad a) Płace: I kwartał 1400, II kwartał $1400(1+0,8\cdot 0,04) = 1444,8$, III kwartał $1444,8(1+0,8\cdot 0,03) = 1479,48$, IV kwartał $1479,48(1+0,8\cdot 0,01) = 1491,31$, I kwartał następnego roku $1491,31(1+0,8\cdot 0,03) = 1527,1$.
Ad b) Roczna stopa inflacji
$i = 1,04\cdot 1,03\cdot 1,01\cdot 1,03 - 1 = 01144 = 11,44\%$.
Ad c) Przeciętna kwartalna stopa inflacji
$i_{prz} = \sqrt[4]{1,04\cdot 1,03\cdot 1,01\cdot 1,03} - 1 = 0,0274 = 2,74\%$.
Ad d) Nominalnie płaca wzrosła o $r\%$, gdzie

$$r = \frac{1527,1 - 1400}{1400} = 9,08\%$$

Wzrost realny

$$r_{\mathrm{re}} = \frac{0,0908 - 0,1144}{1,1144} = -0,0212 = -2,12\%.$$

Przykład Roczna stopa oprocentowania lokaty wynosi 13% i bank stosuje kapitalizację kwartalną złożoną z dołu. Jaka jest realna roczna stopa procentowa, jeżeli stopa inflacji w kolejnych kwartałach była równa odpowiednio 5%, 3%, 2%, 4% ?

$$r_{ef} = (1+\frac{0,13}{4})^4 - 1 = 0,1365 = 13,65\%$$

$$i = 1,05\cdot 1,03\cdot 1,02\cdot 1,04 - 1 = 0,1473 = 14,73\%$$

$$r_{\text{re,ef}} = \frac{0,1365 - 0,1473}{1,1473} = -0,0094 = -0,94\%$$

Właściciel kapitału traci rocznie ok. 0,94%.
Przykład Wyznaczyć realne stopy procentowe, gdy:
a) $r = 16\%$, $i = 10\%$.

$$r_{\text{re}} = \frac{0,06}{1,1} \approx 0,0545 = 5,45\%.$$

b) $r = 8\%$, $i = 10\%$.

$$r_{\text{re}} = \frac{-0,02}{1,1} \approx 0,0182 = -1,82\%.$$

Wzór (3) można zapisać w postaci:

$$K_1^{\text{re}} = \frac{K_0}{1+i}(1+r),$$

i widać wtedy, że gdyby K_0 zastąpić przez $K_0(1+i)$ — czyli dokonać waloryzacji kwoty K_0 o wskaźnik inflacji — to r oznaczałoby stopę rzeczywistego pomnożenia kapitału. Metoda waloryzacji (indeksacji) jest prostą metodą uwzględniania inflacji w matematyce finansowej.
W przypadku kapitalizacji niezgodnej przy m-krotnym dopisywaniu odsetek w okresie stopy r realną stopę efektywną określa równanie:

$$K_0(1 + r_{\text{re,ef}}) = K_0 \frac{(1+\frac{r}{m})^m}{1+i},$$

stąd

$$r_{\text{re,ef}} = \frac{(1+\frac{r}{m})^m}{1+i} - 1 = \frac{r_{\text{ef}} - i}{1+i}.$$