Wektory i wartości własne

Maciej Grzesiak

Treść wykładu

- Podprzestrzenie niezmiennicze.
- Wektory i wartości własne.
- Diagonalizacja macierzy.
- Twierdzenie Cayley – Hamiltona

Podprzestrzenie niezmiennicze

Definicja

Niech $f : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym.
Podprzestrzeń $W \subset V$ nazywamy niezmienniczą względem f, jeżeli $f(\mathbf{w}) \in W$ dla każdego $\mathbf{w} \in W$.

Podprzestrzenie niezmiennicze: przykłady

1. Dla dowolnego $f : V \to V$ istnieją co najmniej dwie podprzestrzenie niezmiennicze: podprzestrzeń zerowa $\{0\}$ i cała przestrzeń V.

Podprzestrzenie niezmiennicze: przykłady

1. Dla dowolnego $f : V \to V$ istnieją co najmniej dwie podprzestrzenie niezmiennicze: podprzestrzeń zerowa $\{0\}$ i cała przestrzeń V.
2. Jeżeli f jest obrotem przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dokoła pewnej osi przechodzącej przez 0, to podprzestrzeniami niezmienniczymi są: oś obrotu i płaszczyzna prostopadła do osi i przechodząca przez 0.

Podprzestrzenie niezmiennicze: przykłady

1. Dla dowolnego $f : V \to V$ istnieją co najmniej dwie podprzestrzenie niezmiennicze: podprzestrzeń zerowa $\{0\}$ i cała przestrzeń V.
2. Jeżeli f jest obrotem przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dokoła pewnej osi przechodzącej przez 0, to podprzestrzeniami niezmienniczymi są: oś obrotu i płaszczyzna prostopadła do osi i przechodząca przez 0.
3. Jeżeli f jest jednokładnością płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ o środku w początku układu (i dowolnej skali), to każda podprzestrzeń jest niezmiennicza.

Definicja

Niech $f : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Wektor $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, spełniający związek $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{K}$ nazywamy wektorem własnym, a odpowiadający mu skalar λ wartością własną przekształcenia liniowego f.

Definicja

Niech $f : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Wektor $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, spełniający związek $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{K}$ nazywamy wektorem własnym, a odpowiadający mu skalar λ wartością własną przekształcenia liniowego f.

Jeżeli $\mathbf{v}$ jest wektorem własnym, to wektory postaci $\alpha\mathbf{v}$ tworzą jednowymiarową podprzestrzeń niezmienniczą.

Definicja

Niech $f : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Wektor $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, spełniający związek $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{K}$ nazywamy wektorem własnym, a odpowiadający mu skalar λ wartością własną przekształcenia liniowego f.

Jeżeli $\mathbf{v}$ jest wektorem własnym, to wektory postaci $\alpha \mathbf{v}$ tworzą jednowymiarową podprzestrzeń niezmienniczą.
Odwrotnie, jeśli W jest jednowymiarową podprzestrzenią niezmienniczą, to każdy wektor tej podprzestrzeni jest wektorem własnym.

Przykład 1. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie symetrią względem prostej l przechodzącej przez początek układu. Wektory leżące na tej prostej są wektorami własnymi z wartością własną 1, a wektory prostopadłe do prostej l są wektorami własnymi z wartością własną -1.

Przykład 1. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie symetrią względem prostej l przechodzącej przez początek układu. Wektory leżące na tej prostej są wektorami własnymi z wartością własną 1, a wektory prostopadłe do prostej l są wektorami własnymi z wartością własną -1.

Przykład 2. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie obrotem płaszczyzny dokoła początku układu o kąt φ różny od 0 i różny od π. To przekształcenie nie ma wektorów własnych.

Twierdzenie (o istnieniu)

Jeżeli V jest skończenie wymiarową przestrzenią zespoloną, to każde przekształcenie liniowe $f : V \to V$ ma przynajmniej jeden wektor własny.

Twierdzenie (o istnieniu)

Jeżeli V jest skończenie wymiarową przestrzenią zespoloną, to każde przekształcenie liniowe $f : V \to V$ ma przynajmniej jeden wektor własny.

D o w ó d. Niech $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ będzie macierzą przekształcenia f w pewnej bazie przestrzeni liniowej V. Jeżeli $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest wektorem własnym, tj. $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{K}$, to:

Twierdzenie (o istnieniu)

Jeżeli V jest skończenie wymiarową przestrzenią zespoloną, to każde przekształcenie liniowe $f : V \to V$ ma przynajmniej jeden wektor własny.

Dowód. Niech $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ będzie macierzą przekształcenia f w pewnej bazie przestrzeni liniowej V. Jeżeli $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest wektorem własnym, tj. $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{K}$, to:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}^T = \lambda \mathbf{v}^T$$

($\mathbf{v}^T$ oznacza macierz jednokolumnową — transpozycję wektora $\mathbf{v}$).

Ta równość wektorowa jest równoważna układowi równań:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & \lambda x_2 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & \lambda x_n \end{array}, \tag{1}$$

Ta równość wektorowa jest równoważna układowi równań:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & \lambda x_2 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & \lambda x_n \end{array}, \qquad (1)$$

czyli

$$\begin{array}{cccccccc} (a_{11}-\lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22}-\lambda)x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & (a_{nn}-\lambda)x_n & = 0 \end{array}. \qquad (2)$$

Układ taki ma rozwiązanie niezerowe wtedy i tylko wtedy, gdy liczba λ spełnia warunek:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Układ taki ma rozwiązanie niezerowe wtedy i tylko wtedy, gdy liczba λ spełnia warunek:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Lewa strona tej równości jest wielomianem zmiennej λ stopnia n. Na mocy zasadniczego twierdzenia algebry równanie (3) ma co najmniej jeden pierwiastek λ_0.

Układ taki ma rozwiązanie niezerowe wtedy i tylko wtedy, gdy liczba λ spełnia warunek:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Lewa strona tej równości jest wielomianem zmiennej λ stopnia n. Na mocy zasadniczego twierdzenia algebry równanie (3) ma co najmniej jeden pierwiastek λ_0.
Jeżeli $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest jakimkolwiek rozwiązaniem niezerowym układu otrzymanego z układu (2) po podstawieniu $\lambda = \lambda_0$, to wektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest własny. ■

Równanie

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

można zapisać krótko:

Równanie

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

można zapisać krótko:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

lub

Równanie

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

można zapisać krótko:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

lub

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0.$$

Nazywamy je równaniem charakterystycznym przekształcenia f, a wielomian tworzący lewą stronę tego równania — wielomianem charakterystycznym przekształcenia f.

Podprzestrzenie własne

Jeżeli do zbioru wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ dołączymy wektor zerowy, to otrzymamy podprzestrzeń.

Definicja

Dla danej wartości własnej λ zbiór rozwiązań równania $\mathbf{Av}^T = \lambda\mathbf{v}^T$ jest podprzestrzenią (bo jest to zbiór rozwiązań układu jednorodnego). Nazywamy ją podprzestrzenią własną i oznaczamy E_λ.

Podprzestrzenie własne

Jeżeli do zbioru wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ dołączymy wektor zerowy, to otrzymamy podprzestrzeń.

Definicja

Dla danej wartości własnej λ zbiór rozwiązań równania $\mathbf{A}\mathbf{v}^T = \lambda\mathbf{v}^T$ jest podprzestrzenią (bo jest to zbiór rozwiązań układu jednorodnego). Nazywamy ją podprzestrzenią własną i oznaczamy E_λ.

Wymiar podprzestrzeni E_λ nazywamy geometryczną krotnością wartości własnej. Może ona być mniejsza od krotności algebraicznej, tj. krotności wartości własnej jako pierwiastka równania charakterystycznego.

Przykład 1. Obliczyć wartości i wektory własne macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład 1. Obliczyć wartości i wektory własne macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Piszemy równanie charakterystyczne:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

czyli

$$-\lambda^3 + 13\lambda - 12 = 0.$$

Przykład 1. Obliczyć wartości i wektory własne macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Piszemy równanie charakterystyczne:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

czyli

$$-\lambda^3 + 13\lambda - 12 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są -4, 1, 3. Macierz ma więc trzy wartości własne. Obliczymy teraz wektory własne.

Dla $\lambda = -4$ układ (2) przyjmuje postać:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x & + & 3y & & & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & -y & + & 5z & = & 0 \end{array}.$$

Rozwiązaniem układu są liczby $x = -3k$, $y = 5k$, $z = k$ $(k \in \mathbb{R})$.
Zatem wektory własne są postaci $k(-3, 5, 1)$ $(k \in \mathbb{R})$.

Analogicznie, dla $\lambda = 1$ układ (2) przyjmuje postać:

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 3y & & & = & 0 \\ 3x & - & 3y & - & z & = & 0 \\ & & -y & & & = & 0 \end{array}.$$

Znajdujemy: $x = k$, $y = 0$, $z = 3k$ $(k \in \mathbb{R})$. Zatem wektory własne są postaci $k(1, 0, 3)$, $k \in \mathbb{R}$.

Dla $\lambda = 3$ mamy:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & 3y & & & = & 0 \\ 3x & - & 5y & - & z & = & 0 \\ & & -y & - & 2z & = & 0 \end{array},$$

skąd $x = 3k$, $y = 2k$, $z = -k$ $(k \in \mathbb{R})$. Wektory własne: $k(3, 2, -1)$, $k \in \mathbb{R}$.

Macierze podobne

Definicja

Macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ nazywamy podobnymi, gdy istnieje taka macierz nieosobliwa $\mathbf{P}$, że $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

Macierze podobne

Definicja

Macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ nazywamy podobnymi, gdy istnieje taka macierz nieosobliwa $\mathbf{P}$, że $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

Twierdzenie

Jeżeli macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są podobne, to mają ten sam wyznacznik, ten sam rząd, ten sam wielomian charakterystyczny i te same wartości własne.

Macierze podobne

D o w ó d (częściowy). Niech $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ dla pewnej macierzy nieosobliwej $\mathbf{P}$. Wtedy

Macierze podobne

D o w ó d (częściowy). Niech $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ dla pewnej macierzy nieosobliwej $\mathbf{P}$. Wtedy

$\det \mathbf{B} =$

Macierze podobne

D o w ó d (częściowy). Niech $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ dla pewnej macierzy nieosobliwej $\mathbf{P}$. Wtedy

$\det \mathbf{B} = \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) =$

Macierze podobne

D o w ó d (częściowy). Niech $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ dla pewnej macierzy nieosobliwej $\mathbf{P}$. Wtedy

$$\det \mathbf{B} = \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \det \mathbf{P}^{-1} \det \mathbf{A} \det \mathbf{P} =$$

Macierze podobne

Dowód (częściowy). Niech $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ dla pewnej macierzy nieosobliwej $\mathbf{P}$. Wtedy

$$\det \mathbf{B} = \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}) = \det \mathbf{P}^{-1} \det \mathbf{A} \det \mathbf{P} = \frac{1}{\det \mathbf{P}} \det \mathbf{A} \det \mathbf{P} =$$

Macierze podobne

Dowód (częściowy). Niech $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ dla pewnej macierzy nieosobliwej $\mathbf{P}$. Wtedy

$$\det \mathbf{B} = \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \det \mathbf{P}^{-1} \det \mathbf{A} \det \mathbf{P} = \frac{1}{\det \mathbf{P}} \det \mathbf{A} \det \mathbf{P} = \det \mathbf{A}$$

Macierze podobne

D o w ó d (częściowy). Niech $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ dla pewnej macierzy nieosobliwej $\mathbf{P}$. Wtedy

$$\det \mathbf{B} = \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}) = \det \mathbf{P}^{-1} \det \mathbf{A} \det \mathbf{P} = \frac{1}{\det \mathbf{P}} \det \mathbf{A} \det \mathbf{P} = \det \mathbf{A}$$

więc wyznacznik jest ten sam.

Macierze podobne

Sprawdzimy jeszcze równość wielomianów charakterystycznych:

$$\det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} - \lambda\mathbf{I}) \;=\; \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} - \mathbf{P}^{-1}\lambda\mathbf{IP}) =$$

Macierze podobne

Sprawdzimy jeszcze równość wielomianów charakterystycznych:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} - \lambda\mathbf{I}) &= \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} - \mathbf{P}^{-1}\lambda\mathbf{IP}) = \\ &= \det(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{P}) =\end{aligned}$$

Macierze podobne

Sprawdzimy jeszcze równość wielomianów charakterystycznych:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}-\lambda\mathbf{I}) &= \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}-\mathbf{P}^{-1}\lambda\mathbf{I}\mathbf{P}) = \\ &= \det(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{P}) = \\ &= \det(\mathbf{P}^{-1})\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\det\mathbf{P} =\end{aligned}$$

Macierze podobne

Sprawdzimy jeszcze równość wielomianów charakterystycznych:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}) &= \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\lambda\mathbf{I}\mathbf{P}) = \\ &= \det(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{P}) = \\ &= \det(\mathbf{P}^{-1})\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\det\mathbf{P} = \\ &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Działania na macierzach diagonalnych

Potęgowanie macierzy diagonalnej:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^n \end{bmatrix},$$

Działania na macierzach diagonalnych

Jeśli $p(t)$ jest wielomianem, a $\mathbf{A}$ jest macierzą diagonalną, to

$$p\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p(\lambda_3) & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

Działania na macierzach podobnych do diagonalnych

Jeśli $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$, gdzie $\det \mathbf{P} \neq 0$, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:

Działania na macierzach podobnych do diagonalnych

Jeśli $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$, gdzie $\det \mathbf{P} \neq 0$, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{A}^n = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P})^n = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} \cdots \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^n\mathbf{P},$$

Działania na macierzach podobnych do diagonalnych

Jeśli $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$, gdzie $\det \mathbf{P} \neq 0$, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{A}^n = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P})^n = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} \cdots \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^n\mathbf{P},$$

a w konsekwencji dla dowolnego wielomianu $p(t)$:

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{P}^{-1}p(\mathbf{B})\mathbf{P}.$$

Działania na macierzach podobnych do diagonalnych

Jeśli $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$, gdzie $\det \mathbf{P} \neq 0$, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{A}^n = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P})^n = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} \cdots \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^n\mathbf{P},$$

a w konsekwencji dla dowolnego wielomianu $p(t)$:

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{P}^{-1}p(\mathbf{B})\mathbf{P}.$$

Jeśli więc macierz $\mathbf{B}$ jest diagonalna (wtedy $\mathbf{P}$ nazywamy macierzą diagonalizującą), to powyższa równość daje możliwość łatwego obliczania potęg i wielomianów macierzy $\mathbf{A}$. Wykonujemy czynności:

Działania na macierzach podobnych do diagonalnych

Jeśli $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$, gdzie $\det \mathbf{P} \neq 0$, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{A}^n = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P})^n = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} \cdots \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^n\mathbf{P},$$

a w konsekwencji dla dowolnego wielomianu $p(t)$:

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{P}^{-1}p(\mathbf{B})\mathbf{P}.$$

Jeśli więc macierz $\mathbf{B}$ jest diagonalna (wtedy $\mathbf{P}$ nazywamy macierzą diagonalizującą), to powyższa równość daje możliwość łatwego obliczania potęg i wielomianów macierzy $\mathbf{A}$. Wykonujemy czynności:

- obliczamy potęgę (lub wielomian) macierzy diagonalnej;

Działania na macierzach podobnych do diagonalnych

Jeśli $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$, gdzie $\det \mathbf{P} \neq 0$, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{A}^n = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P})^n = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} \cdots \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^n\mathbf{P},$$

a w konsekwencji dla dowolnego wielomianu $p(t)$:

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{P}^{-1}p(\mathbf{B})\mathbf{P}.$$

Jeśli więc macierz $\mathbf{B}$ jest diagonalna (wtedy $\mathbf{P}$ nazywamy macierzą diagonalizującą), to powyższa równość daje możliwość łatwego obliczania potęg i wielomianów macierzy $\mathbf{A}$. Wykonujemy czynności:

- obliczamy potęgę (lub wielomian) macierzy diagonalnej;
- przemnażamy przez $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}^{-1}$.

Przykład . Dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Przykład . Dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

mamy

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

Przykład . Dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

mamy

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

Stąd np.

$$\mathbf{A}^{20} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{20} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 + 5^{20} & -1 + 5^{20} \\ -3 + 3 \cdot 5^{20} & 1 + 3 \cdot 5^{20} \end{bmatrix}$$

Przykład 2. Dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Przykład 2. Dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

mamy

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

Przykład 2. Dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

mamy

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

Stąd np.

$$\mathbf{A}^{10} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

Twierdzenie

Niech $\mathbf{A}$ *będzie macierzą mającą n liniowo niezależnych wektorów własnych* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$*. Niech* λ_i *będzie wartością własną odpowiadającą wektorowi własnemu* $\mathbf{v}_i$ *(dla* $i = 1, 2, \ldots, n$*), tj.* $\mathbf{A}\mathbf{v}_i^T = \lambda_i \mathbf{v}_i^T$*.*

Twierdzenie

Niech $\mathbf{A}$ *będzie macierzą mającą n liniowo niezależnych wektorów własnych* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. *Niech* λ_i *będzie wartością własną odpowiadającą wektorowi własnemu* $\mathbf{v}_i$ *(dla* $i = 1, 2, \ldots, n$*), tj.* $\mathbf{A}\mathbf{v}_i^T = \lambda_i \mathbf{v}_i^T$.
Utwórzmy macierz $\mathbf{P}$*, której kolumnami są wektory* $\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T, ..., \mathbf{v}_n^T$ *:*

$$\mathbf{P} = [\ \mathbf{v}_1^T \quad \mathbf{v}_2^T \quad \ldots \quad \mathbf{v}_n^T\ ].$$

Twierdzenie

Niech $\mathbf{A}$ *będzie macierzą mającą n liniowo niezależnych wektorów własnych* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$*. Niech* λ_i *będzie wartością własną odpowiadającą wektorowi własnemu* $\mathbf{v}_i$ *(dla* $i = 1, 2, \ldots, n$*), tj.* $\mathbf{A}\mathbf{v}_i^T = \lambda_i \mathbf{v}_i^T$*.*
Utwórzmy macierz $\mathbf{P}$*, której kolumnami są wektory* $\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T, ..., \mathbf{v}_n^T$ *:*

$$\mathbf{P} = [\ \mathbf{v}_1^T \quad \mathbf{v}_2^T \quad ... \quad \mathbf{v}_n^T\ ].$$

Wówczas:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

czyli macierz $\mathbf{A}$ *jest podobna do macierzy diagonalnej.*

Przykład diagonalizacji

Weźmy macierz z Przykładu 1:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład diagonalizacji

Weźmy macierz z Przykładu 1:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Z jej wektorów własnych tworzymy macierz $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Przykład diagonalizacji

Weźmy macierz z Przykładu 1:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Z jej wektorów własnych tworzymy macierz $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Jej macierz odwrotna to:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{35} & \frac{1}{7} & \frac{1}{35} \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} \end{bmatrix}.$$

Mamy zatem

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{35} & \frac{1}{7} & \frac{1}{35} \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Mamy zatem

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{35} & \frac{1}{7} & \frac{1}{35} \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

A więc np.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{10} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{35} & \frac{1}{7} & \frac{1}{35} \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} \end{bmatrix}$$

Przykład 3. Wyznaczyć wektory własne dla $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$.

Przykład 3. Wyznaczyć wektory własne dla $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$.

Wielomian charakterystyczny:

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{k1+k2+k3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 & 2 \\ 1-\lambda & -7-\lambda & 3 \\ 1-\lambda & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 1 & -7-\lambda & 3 \\ 1 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (1-\lambda)\lambda^2. \end{aligned}$$

Zatem wartości własne to 0 i 1.

Dla $\lambda = 0$ rozwiązujemy (metodą eliminacji) układ jednorodny o macierzy $\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}$. Otrzymujemy tylko jeden wektor $\mathbf{v} = (a, 2a, 3a) = a(1, 2, 3)$ mimo, że krotność wartości własnej wynosi 2.

Dla $\lambda = 0$ rozwiązujemy (metodą eliminacji) układ jednorodny o macierzy $\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}$. Otrzymujemy tylko jeden wektor $\mathbf{v} = (a, 2a, 3a) = a(1, 2, 3)$ mimo, że krotność wartości własnej wynosi 2.
Dla $\lambda = 1$ rozwiązujemy (metodą eliminacji) układ jednorodny o macierzy $\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I}$. Otrzymujemy wektor $\mathbf{v} = (b, b, b) = b(1, 1, 1)$.

Dla $\lambda = 0$ rozwiązujemy (metodą eliminacji) układ jednorodny o macierzy $\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}$. Otrzymujemy tylko jeden wektor $\mathbf{v} = (a, 2a, 3a) = a(1, 2, 3)$ mimo, że krotność wartości własnej wynosi 2.
Dla $\lambda = 1$ rozwiązujemy (metodą eliminacji) układ jednorodny o macierzy $\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I}$. Otrzymujemy wektor $\mathbf{v} = (b, b, b) = b(1, 1, 1)$. Tym razem jest za mało wektorów, aby przeprowadzić diagonalizację.

Dla $\lambda = 0$ rozwiązujemy (metodą eliminacji) układ jednorodny o macierzy $\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}$. Otrzymujemy tylko jeden wektor $\mathbf{v} = (a, 2a, 3a) = a(1, 2, 3)$ mimo, że krotność wartości własnej wynosi 2.
Dla $\lambda = 1$ rozwiązujemy (metodą eliminacji) układ jednorodny o macierzy $\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I}$. Otrzymujemy wektor $\mathbf{v} = (b, b, b) = b(1, 1, 1)$. Tym razem jest za mało wektorów, aby przeprowadzić diagonalizację.
Uwaga. Wartość własna $\lambda = 0$ ma krotność algebraiczną 2, ale krotność geometryczną 1.

Z poprzedniego przykładu widać, że nie wszystkie macierze mają wystarczającą liczbę wektorów własnych (mogą ich wcale nie mieć; przykładem jest np. macierz obrotu).

Z poprzedniego przykładu widać, że nie wszystkie macierze mają wystarczającą liczbę wektorów własnych (mogą ich wcale nie mieć; przykładem jest np. macierz obrotu).
Twierdzenie o istnieniu zapewnia wprawdzie, że każda macierz ma zespoloną wartość własną, ale:

Z poprzedniego przykładu widać, że nie wszystkie macierze mają wystarczającą liczbę wektorów własnych (mogą ich wcale nie mieć; przykładem jest np. macierz obrotu).
Twierdzenie o istnieniu zapewnia wprawdzie, że każda macierz ma zespoloną wartość własną, ale:

1. nie wynika z tego istnienie n niezależnych liniowo wektorów własnych;

Z poprzedniego przykładu widać, że nie wszystkie macierze mają wystarczającą liczbę wektorów własnych (mogą ich wcale nie mieć; przykładem jest np. macierz obrotu).
Twierdzenie o istnieniu zapewnia wprawdzie, że każda macierz ma zespoloną wartość własną, ale:

1. nie wynika z tego istnienie n niezależnych liniowo wektorów własnych;
2. w praktyce, gdy macierz jest rzeczywista szukamy tylko rzeczywistych wartości własnych, których może wcale nie być.

Przykład 4. Macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ma wielomian charakterystyczny $c(\lambda) = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$.

Przykład 4. Macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ma wielomian charakterystyczny $c(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$. Jest tylko jedna wartość własna, i jeden wektor własny $(0, 0, 1)$.

Macierze symetryczne

Twierdzenie

Niech $\mathbf{A}$ *będzie rzeczywistą macierzą symetryczną (tj.* $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$*). Wtedy wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego są rzeczywiste i istnieje n wartości własnych (licząc z krotnościami) oraz n liniowo niezależnych wektorów własnych* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Macierze symetryczne

Twierdzenie

Niech $\mathbf{A}$ będzie rzeczywistą macierzą symetryczną (tj. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$). Wtedy wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego są rzeczywiste i istnieje n wartości własnych (licząc z krotnościami) oraz n liniowo niezależnych wektorów własnych $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Wniosek

Każda macierz symetryczna jest podobna do macierzy diagonalnej.

Macierze symetryczne

Prawdziwość twierdzenia pokażemy na przykładzie macierzy stopnia 2. Macierz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Macierze symetryczne

Prawdziwość twierdzenia pokażemy na przykładzie macierzy stopnia 2. Macierz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

ma wielomian charakterystyczny $c(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2)$.

Macierze symetryczne

Prawdziwość twierdzenia pokażemy na przykładzie macierzy stopnia 2. Macierz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

ma wielomian charakterystyczny $c(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2)$. Wyróżnik $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$ jest nieujemny.

Macierze symetryczne

Prawdziwość twierdzenia pokażemy na przykładzie macierzy stopnia 2. Macierz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

ma wielomian charakterystyczny $c(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2)$.
Wyróżnik $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$ jest nieujemny.
Gdy $\Delta > 0$, to wielomian ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, czyli istnieją dwie wartości własne, a więc dwa liniowo niezależne wektory własne.

Macierze symetryczne

Prawdziwość twierdzenia pokażemy na przykładzie macierzy stopnia 2. Macierz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

ma wielomian charakterystyczny $c(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2)$. Wyróżnik $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$ jest nieujemny.

Gdy $\Delta > 0$, to wielomian ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, czyli istnieją dwie wartości własne, a więc dwa liniowo niezależne wektory własne.

Gdy $\Delta = 0$, to macierz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ jest diagonalna, i każdy wektor jest własny.

Macierze symetryczne

Przykład . Macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ma wielomian charakterystyczny $c(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$.
Wektory własne:
dla $\lambda = -1$:

$$(1, -1, 0)^T, \quad (1, 0, -1)^T;$$

dla $\lambda = 2$:

$$(1, 1, 1)^T.$$

Macierze symetryczne

Tworzymy macierz **P** z wektorów własnych macierzy **A**:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

i znajdujemy jej odwrotność:

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierze symetryczne

Tworzymy macierz **P** z wektorów własnych macierzy **A**:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

i znajdujemy jej odwrotność:

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wtedy zachodzi równość

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ślad macierzy

Można wykazać, że suma wszystkich wartości własnych macierzy jest równa sumie elementów przekątnej głównej tej macierzy.

Definicja

Śladem macierzy $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ nazywamy sumę elementów jej przekątnej głównej.

Ślad macierzy

Można wykazać, że suma wszystkich wartości własnych macierzy jest równa sumie elementów przekątnej głównej tej macierzy.

Definicja

Śladem macierzy $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ nazywamy sumę elementów jej przekątnej głównej.

Oznaczenie: $\operatorname{tr} \mathbf{A}$. Zatem z definicji:

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

oraz jak można wykazać $\operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Każda macierz spełnia swoje równanie charakterystyczne.

Twierdzenie (Cayleya–Hamiltona)

Jeżeli $\mathbf{A}$ *jest macierzą kwadratową, a* $c(\lambda)$ *jest jej wielomianem charakterystycznym, to* $c(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

D o w ó d. Niech $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ będzie macierzą stopnia n i niech

$$c(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0.$$

Dopełnienia algebraiczne macierzy $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ są wielomianami zmiennej λ stopnia (co najwyżej) $n-1$. Zatem

$$[(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})_{ij}]^T = \mathbf{D}_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \mathbf{D}_1\lambda + \mathbf{D}_0,$$

gdzie $\mathbf{D}_i$ są macierzami stopnia n.

Ponieważ

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})[(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})_{ij}]^T = \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\cdot\mathbf{I} = c(\lambda)\mathbf{I},$$

więc

$$\begin{aligned} c(\lambda)\mathbf{I} &= (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})(\mathbf{D}_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\mathbf{D}_1\lambda+\mathbf{D}_0) = \\ &= -\mathbf{D}_{n-1}\lambda^{n-1}+(\mathbf{A}\mathbf{D}_{n-1}-\mathbf{D}_{n-2})\lambda^{n-1}\cdots+(\mathbf{A}\mathbf{D}_1-\mathbf{D}_0)\lambda+\mathbf{A} \end{aligned}$$

ale z drugiej strony:

$$\begin{aligned} c(\lambda)\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} c(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c(\lambda) & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & c(\lambda) \end{bmatrix} = \\ &= (c_n\mathbf{I})\lambda^n + (c_{n-1}\mathbf{I})\lambda^{n-1} + \dots + (c_1\mathbf{I})\lambda^+ c_0\mathbf{I}. \end{aligned}$$

Po porównaniu mamy:

$$\begin{aligned} -\mathbf{D}_{n-1} &= c_n\mathbf{I} \\ \mathbf{A}\mathbf{D}_{n-1} - \mathbf{D}_{n-2} &= c_{n-1}\mathbf{I} \\ &\dots \\ \mathbf{A}\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1 &= c_2\mathbf{I} \\ \mathbf{A}\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_0 &= c_1\mathbf{I} \\ \mathbf{A}\mathbf{D}_0 &= c_0\mathbf{I}. \end{aligned}$$

Przez pomnożenie tych równości (z lewej strony) przez $\mathbf{A}^n, \dots, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}, \mathbf{I}$ odpowiednio otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
-\mathbf{A}^n\mathbf{D}_{n-1} &= c_n\mathbf{A}^n \\
\mathbf{A}^n\mathbf{D}_{n-1} - \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{D}_{n-2} &= c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} \\
&\dots \\
\mathbf{A}^3\mathbf{D}_2 - \mathbf{A}^2\mathbf{D}_1 &= c_2\mathbf{A}^2 \\
\mathbf{A}^2\mathbf{D}_1 - \mathbf{A}\mathbf{D}_0 &= c_1\mathbf{A} \\
\mathbf{A}\mathbf{D}_0 &= c_0\mathbf{I},
\end{aligned}$$

a po dodaniu stronami uzyskujemy:

$$c_n\mathbf{A}^n + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + c_1\mathbf{A}^1 + c_0\mathbf{I} = \mathbf{O}.\blacksquare$$

Twierdzenie Cayleya–Hamiltona ułatwia obliczanie wielomianów macierzowych, gdyż pozwala zredukować stopień wielomianu.

Wniosek

Jeżeli $f(\lambda)$ *jest dowolnym wielomianem o współczynnikach z ciała* $\mathbb{K}$, $\mathbf{A}$ *jest macierzą kwadratową stopnia* n, *to istnieje wielomian* $r(\lambda)$ *stopnia mniejszego od* n, *dla którego* $f(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$.

D o w ó d. Z twierdzenia o dzieleniu wielomianów z resztą wynika, że istnieją takie wielomiany $g(\lambda)$ i $r(\lambda)$, że $f(\lambda) = c(\lambda)g(\lambda) + r(\lambda)$, przy czym $r(\lambda)$ jest stopnia mniejszego niż $n = \deg c(\lambda)$. Zatem

$$f(\mathbf{A}) = c(\mathbf{A})g(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}),$$

czyli $f(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$, bo $c(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. ■

1. Sprawdzić twierdzenie Cayleya–Hamiltona dla macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tutaj $c(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 7$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Łatwo sprawdzić, że

$$\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 7 = 0.$$

2. Obliczyć $\mathbf{A}^6 - 25\mathbf{A}^2 + 112\mathbf{A}$, posługując się twierdzeniem Cayleya–Hamiltona, gdy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tutaj $f(\lambda) = \lambda^6 - 25\lambda^2 + 112$, $c(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda - 2$. Wielomian $f(\lambda)$ po podzieleniu przez $c(\lambda)$ daje iloraz $-\lambda^3 - 4\lambda^2 - 11\lambda - 22$ i resztę $-20\lambda - 44$. Zatem

$$\mathbf{A}^6 - 25\mathbf{A}^2 + 112\mathbf{A} = -20\mathbf{A} - 44\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -44 & 0 & -40 \\ -40 & -64 & 0 \\ 20 & 20 & -104 \end{bmatrix}.$$

Z twierdzenia Cayleya–Hamiltona wynika, że każda macierz kwadratowa stopnia n spełnia pewne równanie stopnia n. Ale niektóre macierze spełniają również pewne równanie stopnia mniejszego niż n.

Definicja

Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą kwadratową. Wielomian $m(\lambda)$ taki, że $m(\mathbf{A}) = 0$, nazywamy wielomianem minimalnym, jeśli nie istnieje wielomian stopnia mniejszego niż $\deg m(t)$ mający tę samą własność.

Łatwo wykazać, że $c(\lambda)$ musi być podzielny przez $m(\lambda)$. Trudniej, że $m(\lambda)$ ma dokładnie takie same pierwiastki co $c(\lambda)$, co najwyżej z mniejszymi krotnościami. W szczególności, jeśli $c(\lambda)$ ma pierwiastki jednokrotne, to $m(\lambda) = c(\lambda)$.