1 Renty życiowe

Renta życiowa jest serią płatności dokonywanych w czasie życia ubezpieczonego. Jej wartość teraźniejsza jest zmienną losową (bo zależy od przyszłego czasu życia T), oznaczaną Y.

1.1 Podstawowe renty życiowe

Renta dożywotnia płatna z góry (ang. *whole life annuity due*) zapewnia coroczną wypłatę kwoty 1 dopóki żyje ubezpieczony. Płatności są dokonywane w momentach $0, 1, \ldots, K$. Jej wartość teraźniejsza to:

$$Y = 1 + v + v^2 + \cdots + v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}.$$

Mamy

$$\Pr(Y = \ddot{a}_{\overline{k+1}|}) = \Pr(K = k) = {}_kp_x q_{x+k},$$

dla $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Składkę netto oznaczamy $\ddot{a}_x$. Zatem

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_kp_x q_{x+k}. \tag{1}$$

Zmienną Y można zapisać w postaci

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathbf{1}(K \geqslant k),$$

gdzie

$$\mathbf{1}(\cdot) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \textit{zdanie} \text{ jest prawdziwe} \\ 0, & \text{jeśli } \textit{zdanie} \text{ jest fałszywe} \end{cases}$$

jest *funkcją indykatorową*, a więc

$$\ddot{a}_x = \mathrm{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_kp_x.$$

W takiej interpretacji renta jest traktowana jako suma ubezpieczeń na dożycie.

Uwaga. Wzór (1) można przekształcić bezpośrednio:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\, {}_kp_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{k} \upsilon^i\Big) {}_kp_x q_{x+k} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \upsilon^i \sum_{k=i}^{\infty} {}_kp_x q_{x+k} = \sum_{i=0}^{\infty} \upsilon^i \sum_{k=i}^{\infty} \Pr(K=k) = \sum_{i=0}^{\infty} \upsilon^i {}_ip_x\end{aligned}$$

Składkę netto dla renty można wyrazić w zależności od składki dla ubezpieczenia na życie. Mamy bowiem:

$$Y = \frac{1-\upsilon^{K+1}}{1-\upsilon} = \frac{1-\upsilon^{K+1}}{d} = \frac{1-Z}{d},$$

czyli

$$\ddot{a}_{\overline{K+1|}} = \frac{1-\upsilon^{K+1}}{d}, \tag{2}$$

skąd, obliczając wartości oczekiwane, otrzymujemy:

$$\ddot{a}_x = \frac{1-A_x}{d},$$

lub

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x.$$

Równość tą można interpretować następująco: dług 1 jest spłacany odsetkami (z góry) i końcową płatnością 1 na koniec roku śmierci.

Wzór (2) można również uzyskać traktując rentę dożywotnią jako różnicę dwóch rent — jednej rozpoczynającej się w chwili 0 (o wartości obecnej $\frac{1}{d}$), drugiej w chwili $K+1$ (o wartości obecnej $\upsilon^{K+1}\cdot\frac{1}{d}$).

Z zależności $Y = \frac{1-Z}{d}$ można wyznaczyć momenty zmiennej losowej Y, np.

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{\mathrm{Var}(Z)}{d^2}.$$

W praktyce renty wypłacane są częściej niż raz w roku, np. miesięcznie. Ogólnie, załóżmy, że renta jest płatna m-krotnie w ciągu roku. Przy rencie płatnej z góry wypłaty w wysokości $1/m$ następują w chwilach $0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots$, tak długo jak rentobiorca żyje. Wartość obecna jest zmienną losową

$$Y = \frac{1}{m}\Big(1 + \upsilon^{1/m} + \upsilon^{2/m} + \cdots \upsilon^{(K+S^{(m)}-1)/m}\Big).$$

Sumując otrzymamy

$$Y = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{K+S^{(m)}-1} \upsilon^{k/m} = \frac{1}{m} \frac{1-Z}{1-\upsilon^{1/m}}.$$

Inna postać:

$$Y = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^{k/m} \mathbf{1}(T \geqslant \frac{k}{m}).$$

Jednorazową składkę netto (czyli wartość oczekiwaną zmiennej Y) oznaczamy $\ddot{a}_x^{(m)}$. Zatem

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \mathrm{E}(Y) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^{k/m} {}_{\frac{k}{m}}p_x.$$

Składkę netto dla renty można też wyrazić w zależności od składki dla ubezpieczenia na życie. Mamy bowiem:

$$Y = \frac{1}{m} \frac{1-Z}{1-\upsilon^{1/m}},$$

skąd, obliczając wartości oczekiwane i uwzględniając, że $m(1-\upsilon^{1/m}) = d^{(m)}$ otrzymujemy:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}}.$$

Rozważymy teraz *renty czasowe (terminowe)*, tj. płatne póki ubezpieczony żyje, ale nie dłużej niż ustalony okres.

Dla renty czasowej n-letniej mamy:

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & \text{dla} \quad K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & \text{dla} \quad K = n, n+1, \ldots \end{cases}$$

Podobnie jak poprzednio mamy:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} {}_kp_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|} {}_np_x,$$

lub

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \upsilon^k {}_kp_x.$$

Mamy także $Y = \frac{1-Z}{d}$, gdzie

$$Z = \begin{cases} \upsilon^K & \text{dla} \quad K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ 0 & \text{dla} \quad K = n, n+1, \ldots \end{cases}$$

Zatem

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d},$$

czyli

$$1 = d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}.$$

Rozpatrzmy teraz renty płatne z dołu. Wtedy:

$$Y = \upsilon + \upsilon^2 + \cdots + \upsilon^K = a_{\overline{K}|}.$$

Ta zmienna losowa różni się od odpowiedniej zmiennej losowej dla rent płatnych z góry jedynie składnikiem stałym 1. Zatem składka netto:

$$a_x = \ddot{a}_x - 1.$$

Ponieważ dla rent stałych:

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - \upsilon^n}{r},$$

czyli

$$1 = ra_{\overline{n}|} + \upsilon^n,$$

więc podstawiając $n = K$ otrzymujemy

$$1 = ra_{\overline{K}|} + \upsilon^K = ra_{\overline{K}|} + (1+r)\upsilon^{K+1}.$$

Obliczając wartości oczekiwane otrzymujemy

$$1 = ra_x + (1+r)A_x.$$

1.2 Renty ze zmienną wartością

Rozważmy rentę zapewniającą wypłaty $r_0, r_1, r_2 \ldots$ w momentach $0, 1, \ldots, K$. Wartość teraźniejsza wynosi:

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^k r_k \mathbf{1}(K \geqslant k).$$

Stąd składka netto:

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^k r_k \cdot {}_k p_x.$$

Ogólniej, rozważmy rentę złożoną z płatności $z_0, z_{\frac{1}{m}}, z_{\frac{2}{m}}, \ldots$ w momentach $0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, K + S^{(m)} - \frac{1}{m}$ (przypomnijmy, że $S^{(m)} = \frac{1}{m} \cdot [mS + 1]$). Najpierw zastąpimy m rocznych płatności ich sumą:

$$r_k = \sum_{j=0}^{m-1} \upsilon^{\frac{j}{m}} z_{k+\frac{j}{m}}.$$

Ponieważ w roku śmierci nie będzie wszystkich płatności, konieczny jest składnik korygujący — ujemne ubezpieczenie na życie, przy czym suma ubezpieczenia w chwili $k + u$, $0 < u < 1$, jest wartością teraźniejszą niedoszłych płatności:

$$c(k+u) = \sum_{j \in J} \upsilon^{\frac{j}{m} - u} z_{k+\frac{j}{m}},$$

gdzie $J = J(u)$ jest zbiorem tych $j \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ dla których $\frac{j}{m} > u$.

Wiemy już, że przy *Założeniu a* (tzn. ${}_u q_x = u q_x$ dla $0 < u < 1$; wtedy K i S są niezależne):

$$c_{k+1} = \int_0^1 c(k+u)(1+r)^{1-u} du.$$

Podstawiając wartość $c(k+u)$ dostajemy:

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= \int_0^1 \left(\sum_{j \in J} \upsilon^{\frac{j}{m} - u} z_{k+\frac{j}{m}} \right) (1+r)^{1-u} du = \\ &= \int_0^1 \sum_{j \in J} (1+r)^{1-\frac{j}{m}} z_{k+\frac{j}{m}} du = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} j (1+r)^{1-\frac{j}{m}} z_{k+\frac{j}{m}}. \end{aligned}$$

A zatem jednorazowa składka netto dla ubezpieczenia z wypłatami m razy w roku wynosi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^k r_k {}_k p_x - \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} \upsilon^{k+1} {}_k p_x q_{x+k},$$

gdzie współczynniki r_k i c_k określone są wzorami wyżej.

1.3 Renty standardowe

Rozważmy rentę złożoną z płatności $r_0, r_1, r_2, \ldots$, gdzie $r_k = k + 1$. Wtedy wartość teraźniejsza wypłaty wynosi:

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)v^k \mathbf{1}(K \geqslant k).$$

Składkę netto oznaczamy $(I\ddot{a})_x$. Ponieważ:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = d(I\ddot{a})_{\overline{n}|} + nv^n,$$

(można to interpretować tak: renta w wysokości 1 jest spłacana odsetkami z góry w wysokości $d, 2d, \ldots, nd$ oraz kwotą n na koniec n-tego roku) więc zastępując n przez $K+1$ mamy:

$$\ddot{a}_{\overline{K+1}|} = d(I\ddot{a})_{\overline{K+1}|} + (K+1)v^{K+1}.$$

Obliczając wartości oczekiwane uzyskujemy

$$\ddot{a}_x = d(I\ddot{a})_x + (IA)_x.$$

2 Składki netto

Polisa ubezpieczeniowa określa z jednej strony wypłaty dla ubezpieczonego (jednorazowe lub w formie renty), a z drugiej strony składki płacone przez niego. Można wyróżnić trzy formy płacenia składki:

1) składka jednorazowa;

2) składki okresowe stałe;

3) składki okresowe zmienne.

Z zasady składki są opłacane z góry. Dla danej polisy ubezpieczeniowej określamy *całkowitą stratę ubezpieczyciela* L, jako różnicę między teraźniejszą wartością wypłat a teraźniejszą wartością składek. Strata jest rozumiana algebraicznie — w szczególności może być ujemna.

Składkę nazywamy składką netto, jeśli spełnia zasadę równoważności:

$$\mathrm{E}(L) = 0.$$

Jednorazowa składka netto, o której była już mowa, spełnia ten warunek.

Przykład. . Rozważmy 10-letnie ubezpieczenie na życie dla 40-latka z sumą ubezpieczenia C płatną na koniec roku śmierci. Składki w wysokości Π są płacone co roku z góry dopóki ubezpieczony żyje, ale nie dłużej niż 10 lat. Wtedy

$$L = \begin{cases} Cv^{K+1} - \Pi \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & \text{dla} \quad K = 0, 1, \ldots, 9 \\ -\Pi \ddot{a}_{\overline{10}|} & \text{dla} \quad K \geqslant 10 \end{cases}$$

Zmienna L ma rozkład dyskretny 11-punktowy, przy czym:

$$\Pr(L = Cv^{k+1} - \Pi \ddot{a}_{\overline{k+1}|}) = {}_k p_{40} q_{40+k}, \quad k = 0, 1, \ldots, 9;$$

$$\Pr(L = -\Pi \ddot{a}_{\overline{10}|}) = {}_{10}p_{40}.$$

Wyznaczymy składkę Π. Z zasady równoważności mamy

$$\sum_{k=0}^{9} (Cv^{k+1} - \Pi \ddot{a}_{\overline{k+1}|}) {}_k p_{40} q_{40+k} + (-\Pi \ddot{a}_{\overline{10}|}) {}_{10}p_{40} = 0,$$

czyli

$$\sum_{k=0}^{9} Cv^{k+1} {}_k p_{40} q_{40+k} - \Pi \Big(\sum_{k=0}^{9} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} {}_k p_{40} q_{40+k} + \ddot{a}_{\overline{10}|} {}_{10}p_{40} \Big) = 0,$$

więc otrzymujemy warunek

$$CA^{1}_{40:\overline{10}|} - \Pi \ddot{a}_{40:\overline{10}|} = 0,$$

czyli

$$\Pi = C \frac{A^{1}_{40:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}}.$$

Dla ilustracji liczbowej weźmy $r = 4\%$ i załóżmy, że śmiertelność podlega prawu de Moivre'a, z wiekiem końcowym $\omega = 100$. Wtedy ${}_k p_{40} q_{40+k} = \frac{1}{60}$, więc

$$A^{1}_{40:\overline{10}|} = \sum_{k=1}^{10} v^k \frac{1}{60} = \frac{1}{60} a_{\overline{10}|} = 0,1352,$$

oraz

$$A_{40:\overset{1}{\overline{10}|}} = \frac{5}{6} v^{10} = 0,5630,$$

zatem

$$A_{40:\overline{10}|} = 0,6982, \quad \ddot{a}_{40:\overline{10}|} = \frac{1 - A_{40:\overline{10}|}}{d} = 7,8476.$$

Ostatecznie:

$$\Pi = 0,0172C.$$

Oczywiście nie można oczekiwać, że ubezpieczyciel będzie wypłacał świadczenia tylko za składki netto. Pobiera on jeszcze składkę za ryzyko. Metoda wyznaczania tej składki opiera się na pojęciu funkcji użyteczności. Jest to funkcja, której wartościami są wartości użyteczności (satysfakcji, komfortu psychicznego). Można mówić o użyteczności różnych zjawisk. Użyteczność pieniądza (bogactwa) jest np. funkcją, która wartości pieniężnej przyporządkowuje użyteczność dla otrzymującego tę wartość. Funkcja użyteczności jest pojęciem psychologicznym, co oznacza, że każdy ma swoją funkcję użyteczności. Jednak pewne ogólne własności są wspólne. Mianowicie, ponieważ każdy woli posiadać więcej niż mniej, więc funkcja użyteczności jest rosnąca. Ponadto krańcowa użyteczność jest malejąca, tzn. każdy dodatkowy procent wzrostu bogactwa powoduje coraz mniejszy przyrost użyteczności. Dla naszych potrzeb będziemy więc zakładać, że funkcja użyteczności $u(x)$ jest funkcją spełniającą warunki:

$$u'(x) > 0, \; u''(x) < 0,$$

i określającą użyteczność posiadania przez ubezpieczyciela wartości (pieniężnej) x. Przykładowo, załóżmy, że

$$u(x) = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax}),$$

gdzie parametr a mierzy awersję ubezpieczyciela do ryzyka.

Po uwzględnieniu funkcji użyteczności warunek $\mathrm{E}(L) = 0$ zostaje zastąpiony warunkiem:

$$\mathrm{E}(u(-L)) = u(0).$$

Oznacza to, że składka jest teraz wyznaczana tak, aby oczekiwana strata użyteczności była równa 0.

Dla powyższej funkcji użyteczności mamy:

$$\mathrm{E}\Big(\frac{1}{a}(1 - e^{aL})\Big) = 0,$$

$$\frac{1}{a}\Big(\mathrm{E}(1) - \mathrm{E}(e^{aL})\Big) = 0,$$

$$\mathrm{E}(e^{aL}) = 1.$$

Dla danych z przykładu:

$$\frac{1}{60}\sum_{k=0}^{9} \exp(aCv^{k+1} - a\Pi\ddot{a}_{\overline{k+1}|}) + \frac{5}{6}\exp(-a\Pi\ddot{a}_{\overline{10}|}) = 1.$$

Wybierzmy $a = 10^{-6}$ aby zobaczyć, jak zmieniają się składki:

Suma ub. C	Skł. netto	Skł. Π	Proc.skł. netto
100 000	1720	1790	104%
500 000	8600	10 600	123%
1 000 000	17200	26 100	153%
3 000 000	51600	221 900	430%
5 000 000	86000	1073 600	1248%

Oczywiście teraz składka nie jest proporcjonalna do sumy ubezpieczenia C. Odzwierciedla to fakt, że np. suma 100 000 stanowi małe ryzyko dla ubezpieczyciela, stąd premia za ryzyko wynosi tylko 4%. W przypadku sumy 5 000 000 ryzyko jest istotne, stąd premia za nie wynosi aż 1148%.

Uwaga. W praktyce składki są jednak proporcjonalne do sumy ubezpieczenia. Ubezpieczyciel może np. doliczać 53% dla każdej wartości C. Wtedy sumy ubezpieczenia przekraczające 1 000 000 wymagają reasekuracji. Natomiast przy kwotach mniejszych ubezpieczony przepłaca (to w pewnym sensie rekompensuje stosunkowo wyższe kwoty stałe takich polis).

3 Podstawowe typy ubezpieczeń

Rozważmy ubezpieczenie na życie w wysokości 1, płatne na koniec roku śmierci, które ma być opłacone rocznymi składkami netto w wysokości P_x. Strata ubezpieczyciela jest zmienną losową:

$$L = v^{K+1} - P_x\ddot{a}_{\overline{K+1}|}.$$

Z warunku $\mathrm{E}(L) = 0$ otrzymujemy:

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}.$$

Aby obliczyć wariancję wykorzystamy wzór (2):

$$\ddot{a}_{\overline{K+1}|} = \frac{1 - v^{K+1}}{d}.$$

A więc:

$$L = \upsilon^{K+1} - P_x \frac{1-\upsilon^{K+1}}{d} = (1+\frac{P_x}{d})\upsilon^{K+1} - \frac{P_x}{d}.$$

Stąd

$$\mathrm{Var}(L) = \Big(1+\frac{P_x}{d}\Big)^2 \mathrm{Var}(\upsilon^{K+1}) = \Big(1+\frac{P_x}{d}\Big)^2 \mathrm{Var}(Z).$$

Pokazuje to, że ryzyko (mierzone wariancją) jest większe w przypadku ubezpieczenia opłacanego rocznymi składkami niż w przypadku ubezpieczenia opłacanego jednorazową składką.

Dla n-letniego ubezpieczenia na życie (suma ubezpieczenia 1, płatna na koniec roku śmierci) składkę netto oznaczamy $P^1_{x:\overline{n}|}$. Ponieważ strata ubezpieczyciela jest zmienną losową:

$$L = \begin{cases} \upsilon^{K+1} - P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{K+1}|} & \text{dla} \quad K = 0,1,\dots,n-1 \\ -P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{n}|} & \text{dla} \quad K \geqslant n, \end{cases}$$

więc z warunku $\mathrm{E}(L) = 0$ mamy

$$A^1_{x:\overline{n}|} - P^1_{x:\overline{n}|}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{K+1}|\,k}p_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|\,k}p_x\Big) = 0,$$

czyli

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

3.1 Ubezpieczenie na dożycie

Załóżmy, że n-letnie ubezpieczenie na dożycie w wysokości 1 opłacane jest rocznymi składkami $P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$. Wtedy strata ubezpieczyciela wynosi:

$$L = \begin{cases} -P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\ddot{a}_{\overline{K+1}|} & \text{dla} \quad K = 0,1,\dots,n-1 \\ \upsilon^n - P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\ddot{a}_{\overline{n}|} & \text{dla} \quad K \geqslant n, \end{cases}$$

Zatem:

$$0 = \mathrm{E}(L) = -P^1_{x:\overline{n}|}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{K+1}|\,k}p_x q_{x+k}\Big) + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} - P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\ddot{a}_{\overline{n}|\,n}p_x,$$

czyli

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{K+1}|\,k}p_x q_{x+k}\Big) + \ddot{a}_{\overline{n}|\,n}p_x) = A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

więc

$$P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

3.2 Ubezpieczenie na życie i dożycie

Składkę netto oznaczamy $P_{x:\overline{n}|}$. Mamy:

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}},$$

oraz

$$P_{x:\overline{n}|} = P^{1}_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}.$$