Równanie algebraiczne drugiego stopnia:

$$az^2 + bz + c = 0,$$

o współczynnikach zespolonych rozwiązujemy w zwykły sposób, tzn. obliczamy wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac$ i stosujemy wzory:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Zauważmy, że w tym przypadku (w przeciwieństwie do przypadku liczb rzeczywistych) zawsze istnieje $\sqrt{\Delta}$ — w istocie są dwa pierwiastki różniące się znakiem. Do powyższych wzorów wystarczy podstawiać dowolny z nich (ten drugi da te same wartości $z_{1,2}$).

1. Rozwiązać równanie

$$z^2 - 4z + 5 = 0.$$

Obliczamy $\Delta = -4$, $\sqrt{\Delta} = \pm 2i$, $z_1 = \frac{4+2i}{2} = 2 + i$, $z_2 = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$.
To równanie miało współczynniki rzeczywiste i jego pierwiastki są liczbami sprzężonymi.

2. Rozwiązać równanie

$$z^2 + (-1 + i)z + (2 + i) = 0.$$

Obliczamy $\Delta = -8 - 6i$, $\sqrt{\Delta} = \pm(1 - 3i)$, więc

$$z_1 = \frac{1 - i + 1 - 3i}{2} = 1 - 2i, \qquad z_2 = \frac{1 - i - 1 - 3i}{2} = i.$$

W ogólnym przypadku pierwiastki nie są sprzężone.
3. Do rozwiązywania równań wyższych rzędów można stosować znane metody. Np. rozwiązywanie równania z zad. 10e:

$$z^3 - 4z^2 + 14z - 20 = 0$$

można rozpocząć od szukania pierwiastków całkowitych wśród dzielników 20. Znajdziemy 2 i stąd

$$z^3 - 4z^2 + 14z - 20 = (z - 2)(z^2 - 2z + 10).$$

Wystarczy teraz rozwiązać równanie $z^2 - 2z + 10 = 0$.
4. W przypadku równania dwukwadratowego, np.10c:

$$z^4 - 2z^2 + 4 = 0$$

podstawiamy $t = z^2$ i znajdujemy

$$t_1 = 1 + \sqrt{3}i, \quad t_2 = 1 - \sqrt{3}i.$$

Dla każdej ze znalezionych wartości należy teraz obliczyć pierwiastki kwadratowe. Otrzymamy

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+i),\ z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+i),\ z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}-i),\ z_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{3}+i).$$

5. Rozwiązywanie równań stopni wyższych wymaga na ogół pewnej pomysłowości. Jeśli się da, warto korzystać z postaci trygonometrycznej. Przykładowo rozważmy równanie:

$$(x+3i)^n + i(x-3i)^n = 0$$

gdzie $x \in \mathbb{R}$.
Zauważmy, że $3i$ na pewno nie jest pierwiastkiem. Zatem możemy równanie podzielić przez $(x-3i)^n$. Otrzymamy

$$\left(\frac{x+3i}{x-3i}\right)^n = -i.$$

Standardowo obliczamy pierwiastki stopnia n liczby $-i = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi$:

$$w_k = \cos\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots n-1.$$

Zatem

$$\frac{x+3i}{x-3i} = w_k,$$

skąd wyliczamy x:

$$x = -3i\frac{1+w_k}{1-w_k}.$$

Podstawimy teraz wartości w_k. Przy tym będziemy korzystać ze wzorów (patrz zad. 5b):

$$1 + \cos\varphi + i\sin\varphi = 2\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}),$$

$$1-\cos\varphi-i\sin\varphi = 1+\cos(\varphi+\pi)+i\sin(\varphi+\pi) = 2\cos\frac{\varphi+\pi}{2}(\cos\frac{\varphi+\pi}{2}+i\sin\frac{\varphi+\pi}{2}).$$

Rachunek przebiega tak (dla uproszczenia zapisu piszemy na razie φ zamiast $\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{n}$):

$$x = -3i\frac{1+w_k}{1-w_k} = -3i\frac{2\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})}{2\cos\frac{\varphi+\pi}{2}(\cos\frac{\varphi+\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi+\pi}{2})}.$$

Uwzględniając, że $\cos\frac{\varphi+\pi}{2} = -\sin\frac{\varphi}{2}$ i wykonując dzielenie postaci trygonometrycznych otrzymamy

$$x = 3i\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})\right) = 3i\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot(-i) = 3\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Podstawiamy teraz $\varphi = \frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{n}$ czyli $\frac{\varphi}{2} = \frac{3+4k}{4n}\pi$. Otrzymujemy:

$$x = 3\operatorname{ctg}\frac{3+4k}{4n}\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots n-1.$$