**1. Rozwiązać równanie. Pierwiastki zaznaczyć w płaszczyźnie zespolonej.**

$$z^3 - (1+i)^3 = 0,$$

**Sposób 1**.
Korzystamy ze wzoru $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, co daje:

$$(z-1-i)(z^2+(1+i)z+(1+i)^2) = (z-1-i)(z^2+(1+i)z+2i)$$

Stąd $z_1 = 1+i$ lub $z^2+(1+i)z+2i = 0$. Obliczamy $\Delta = -6i$, potem korzystając ze wzorów na pierwiastki $\sqrt{\Delta} = \sqrt{3}-i\sqrt{3}$. Zatem $z_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}-i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Te punkty są wierzchołkami trójkąta równobocznego, co powinno być widoczne na rysunku.
**Sposób 2**.
Równanie można zapisać w postaci:

$$\left(\frac{z}{1+i}\right)^3 = 1.$$

Ponieważ pierwiastkami stopnia 3 z 1 są (jak łatwo wyliczyć) liczby $1$, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, więc pierwiastki równania znajdziemy mnożąc te liczby przez $1+i$.
**2. Dla jakich wartości $a$ układ jest: a) oznaczony; b) nieoznaczony; c) sprzeczny. Znaleźć rozwiązanie dla przypadku b).**

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & py & - & z & = & 1 \\ x & + & 10y & - & 6z & = & p \\ 2x & - & y & + & pz & = & 0 \end{array},$$

Obliczamy wyznacznik główny:

$$\begin{vmatrix} 1 & p & -1 \\ 1 & 10 & -6 \\ 2 & -1 & p \end{vmatrix} = -p^2 - 2p + 15.$$

Rozwiązując równanie $-p^2-2p+15 = 0$ znajdziemy $p_1 = -5$, $p_2 = 3$. Zatem gdy $p \neq -5$ i $p \neq 3$ układ jest oznaczony. Pozostałe przypadki badamy osobno:
Dla $p = -5$ otrzymujemy układ:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 5y & - & z & = & 1 \\ x & + & 10y & - & 6z & = & -5 \\ 2x & - & y & - & 5z & = & 0 \end{array},$$

który rozwiązujemy metodą eliminacji, i szybko ujawnia się sprzeczność. Dla $p = 3$ mamy układ

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ x & + & 10y & - & 6z & = & 3 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \end{array},$$

który również rozwiązujemy metodą eliminacji. Otrzymujemy $x = -\frac{8}{7}k + \frac{1}{7}$, $y = \frac{5}{7}k + \frac{2}{7}$, $z = k$. Zatem układ jest nieoznaczony.

**3. Znaleźć wartości i wektory własne macierzy**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obliczamy $\det(A - \lambda I)$. Najlepiej od razu rozwinąć go wg drugiego wiersza:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)^2-4) = -(\lambda-3)^2(\lambda+1)$$

(Można oczywiście zastosować schemat Sarrusa, ale wtedy wyjdzie $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 3\lambda - 9$ i trzeba umieć znaleźć pierwiastki).
Aby znaleźć wektory własne dla $\lambda = 3$ rozwiązujemy (metodą eliminacji) układ jednorodny o macierzy

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

co sprowadza się do jednego równania $x - 2z = 0$. Zatem $y, z$ można przyjąć dowolnie, czyli $x = 2b$, $y = a$, $z = b$. Otrzymujemy wektor $\mathbf{v} = (2b, a, b) = a(0, 1, 0) + b(2, 0, 1)$
Z kolei dla $\lambda = -1$ rozwiązujemy układ jednorodny o macierzy

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tym razem będzie jeden parametr: $x = -2k$, $y = 0$, $z = k$. Otrzymujemy wektor $\mathbf{v} = (-2k, 0, k) = k(-2, 0, 1)$.

**Uwaga**. Zadania dla rzędu drugiego rozwiązuje sie analogicznie. Odpowiedzi:
1. $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -1 - \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3})$, $z_3 = -1 + \sqrt{3} + i(-1 - \sqrt{3})$.
2. Wyznacznik: $p^2 - 3p + 2$. Dla $p = 1$ układ sprzeczny, dla $p = 2$ nieoznaczony z rozwiązaniem: $x = 6 - k, y = -1, z = k$.
3. $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 2)^3$. Wektor własny dla $\lambda = 2$ to $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}a, a, b) = a(\frac{1}{2}, 1, 0) + b(0, 0, 1)$.

**1. Obliczyć, przedstawić w postaci algebraicznej i zaznaczyć na płaszczyźnie Gaussa:**

a) $\sqrt[6]{-64}$;

Znajdujemy postać trygonometryczną: $-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$ i korzystamy ze wzoru na pierwiastki:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \qquad k=0,1,\dots,n-1.$$

$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \sqrt{3}+i,$$

$$w_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i$$

$$w_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}+i$$

Podobnie: $w_3 = -\sqrt{3}-i$, $w_4 = -2i$, $w_5 = \sqrt{3}-i$.

Na rysunku (odręcznym, ale starannym! — jednostki!) powinno być widać, że te liczby są wierzchołkami sześciokąta foremnego.

b) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$;

Znajdujemy postać trygonometryczną: $-8+8\sqrt{3}i = 16(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$ i analogicznie jak wyżej. Argumenty kolejnych pierwiastków to $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}+2\frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}+3\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{3}$.

Pierwiastki: $\sqrt{3}+i, -1+\sqrt{3}, -\sqrt{3}-i, -2i, 1-\sqrt{3}i$.

Na rysunku powinien być widoczny kwadrat.

**2. Rozwiązać równanie macierzowe:**

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jest to równanie postaci $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Aby znaleźć $\mathbf{X}$ należy pomnożyć obie strony równania przez $\mathbf{A}^{-1}$ z **lewej** strony: $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Należy więc obliczyć najpierw macierz odwrotną. Np.:

Obliczamy $\det\mathbf{A} = -2$ i następnie

$$[M_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad [A_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Na końcu wykonujemy mnożenie macierzy:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -2 \\ \frac{11}{2} & 8 & -6 \\ \frac{5}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{X}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jest to równanie postaci $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$. Aby znaleźć $\mathbf{X}$ należy pomnożyć obie strony równania przez $\mathbf{A}^{-1}$ z **prawej** strony: $\mathbf{X} = \mathbf{BA}^{-1}$. Należy więc obliczyć najpierw macierz odwrotną. Np.:
Obliczamy $\det \mathbf{A} = -4$ i następnie

$$[M_{ij}] = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad [A_{ij}] = \begin{bmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^D = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Na końcu wykonujemy mnożenie macierzy:

$$\mathbf{X} = \mathbf{BA}^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

**3. Znaleźć wartości własne macierzy i wektory własne dla tej wartości własnej, która jest dodatnia.**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zaczynamy od wielomianu charakterystycznego:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = \lambda^2(2-\lambda)^2$$

(wyznacznik został rozwinięty według I wiersza). Zatem wartości własne to 0 i 2.
Aby znaleźć wektory własne dla $\lambda = 2$ rozwiązujemy (metodą eliminacji) układ jednorodny o macierzy

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Zatem $x_1, x_3$ są równe 0, $x_4$ można przyjąć dowolnie. Rozwiązanie układu:

$$x_1 = 0, x_2 = a, x_3 = 0, x_4 = a,$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$.
Otrzymujemy wektor $\mathbf{v} = (0, a, 0, a) = a(0, 1, 0, 1)$.

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Rachunki:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3-\lambda & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 3 & 3-\lambda & 3 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = \lambda^3(\lambda-7).$$

(wyznacznik został rozwinięty według II wiersza). Zatem wartości własne to 0 i 7.
Aby znaleźć wektory własne dla $\lambda = 7$ rozwiązujemy (metodą eliminacji) układ jednorodny o macierzy

$$\mathbf{A} - 7\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Po rachunkach otrzymujemy wektor $\mathbf{v} = (2a, 0, 3a, 2a) = a(2, 0, 3, 2)$.