ZESTAW I

1. Rozwiązać równanie. Pierwiastki zaznaczyć w płaszczyźnie zespolonej.

$$z^3 - 8(1+i)^3 = 0,$$

Sposób 1.

Korzystamy ze wzoru $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, co daje:

$$(z-2-2i)(z^2+2(1+i)z+4(1+i)^2) = (z-2-2i)(z^2+2(1+i)z+8i)$$

Stąd $z_1 = 2+2i$ lub $z^2+2(1+i)z+8i = 0$. Obliczamy $\Delta = -24i$, potem korzystając ze wzorów na pierwiastki $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}i$. Zatem $z_2 = -1-\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})$, $z_3 = -1+\sqrt{3}+i(-1-\sqrt{3})$.

Te punkty są wierzchołkami trójkąta równobocznego, co powinno być widoczne na rysunku.

Sposób 2.

Równanie można zapisać w postaci:

$$\left(\frac{z}{2+2i}\right)^3 = 1.$$

Ponieważ pierwiastkami stopnia 3 z 1 są (jak łatwo wyliczyć) liczby 1, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, więc pierwiastki równania znajdziemy mnożąc te liczby przez $2+2i$.

2. Metodą eliminacji rozwiązać układ z parametrem a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & + & 4t & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11t & = & a \end{array}$$

Dla jakich wartości a układ nie ma rozwiązania?

Piszemy macierz uzupełnioną przestawiając od razu $w1$ z $w2$:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & a-2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right].$$

Rozwiązanie istnieje tylko dla $a = 5$ i wynosi: $x = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}k - \frac{6}{5}l$, $y = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}k - \frac{7}{5}l$, $z = k$, $t = l$, gdzie $k, l \in \mathbb{R}$.

3. a) Wykazać, że zbiór wektorów $\{(-2,1,1),(1,1,1),(0,-1,1)\}$ jest ortogonalną bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Czy ta baza jest ortonormalna?

b) Korzystając z tw. o rozwinięciu obliczyć współrzędne wektora (a,b,c) względem tej bazy.

a) Oznaczajac kolejne wektory przez $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ obliczamy iloczyny skalarne:

$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = -2+1+1 = 0$, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = -1+1 = 0$, $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = -1+1 = 0$

Zatem wektory tworzą bazę ortogonalną. Ale normy wektorów bazy to kolejno $\sqrt{6}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$. Baza nie jest więc ortonormalna.

b)

$$\mathbf{v} = \left(\frac{-2a+b+c}{6}, \frac{a+b+c}{3}, \frac{-b+c}{2}\right).$$

ZESTAW II

1. Znaleźć pierwiastki z_1, z_2 równania $(4-3i)z^2-(2+11i)z-(5+i)=0$. Następnie zaznaczyć w płaszczyźnie zespolonej zbiory: $A=\{z \ : \ |z-z_1|=1\}$ i $B=\{z \ : \ |z|=|z_2|\}$.

Obliczamy: $\Delta=(2+11i)^2+4i(4-3i(5+i))=-25$. Zatem $\sqrt{\Delta}=5i$ oraz $z_1=\frac{2+11i+5i}{2(4-3i)i}=-\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$, $z_2=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$

A jest okręgiem o środku $(-\frac{4}{5},\frac{7}{5})$ i promieniu 1, B jest okręgiem o środku $(0,0)$ i promieniu $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

2. Uzasadnić, że wektory $\{(1,2,-1),(2,0,-2),(1,1,-3)\}$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Znaleźć współrzędne wektora $\mathbf{v}=(4,0,4)$ w tej bazie.

Obliczamy wyznacznik macierzy utworzonej z danych wektorów (zapisanych jako kolumny):

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}=8.$$

Skoro wyznacznik jest różny od 0, to wektory są niezależne, a ponieważ ich liczba równa jest wymiarowi przestrzeni, to tworzą bazę. (Alternatywą jest tu obliczenie rzędu macierzy: $R(A)=3$).

Współrzędne wektora $\mathbf{v}$ znajdujemy z równania wektorowego:

$$x(1,2,-1)+y(2,0,-2)+z(1,1,-3)=(4,0,4),$$

któremu odpowiada układ równań o macierzy uzupełnionej:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{array}\right].$$

Układ ten można rozwiązać metodą eliminacji, lub stosując wzory Cramera (wyznacznik główny już mamy, a kolejne liczy się łatwo). Otrzymamy $x=2, y=3, z=-4$, czyli $\mathbf{v}=(2,3-4)$ w tej bazie.

3. Wyznaczyć wartości własne macierzy $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$. Dla mniejszej wartości własnej wyznaczyć wektory własne.

Obliczamy wielomian charakterystyczny macierzy. Rachunki:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{k1+k2+k3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 & 2 \\ 1-\lambda & -7-\lambda & 3 \\ 1-\lambda & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 1 & -7-\lambda & 3 \\ 1 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (1-\lambda)\lambda^2.$$

Zatem wartości własne to 0 i 1.

Aby znaleźć wektory własne dla $\lambda=0$ rozwiązujemy (metodą eliminacji) układ jednorodny o macierzy $\mathbf{A}-0\cdot\mathbf{I}=\mathbf{A}$.

Po rachunkach otrzymujemy wektor $\mathbf{v}=(a,2a,3a)=a(1,2,3)$.

ZESTAW III

1. Znaleźć pierwiastki z_1, z_2 równania $iz^2+(-4+i)z+(1-5i)=0$. Następnie zaznaczyć w płaszczyźnie zespolonej zbiory: $A=\{z\ :\ |z-z_1|=1\}$ i $B=\{z\ :\ |z|=|z_2|\}$.
Obliczamy: $\Delta=(-4+i)^2-4i(1-5i)=-5+12i$, $|\Delta|=13$.

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\frac{-5+13}{2}}-i\sqrt{\frac{5+13}{2}}=2-3i,$$

$z_1=\frac{4-i+2-3i}{2i}=-2-3i$, $z_2=1-i$
A jest okręgiem o środku $(-2,-3)$ i promieniu 1, B jest okręgiem o środku $(0,0)$ i promieniu $\sqrt{13}$.

2. Rozwiązać układy stosując metodę eliminacji Gaussa-Jordana:

$$\begin{cases} + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

Piszemy macierz uzupełnioną przestawiając od razu $w1$ z $w2$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & 0 & -5 & 12 \\ 4 & 3 & -5 & 0 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 6 & -14 & 24 \\ 0 & 3 & 3 & -12 & 21 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & -11 & 17 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 12 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Odp.: $x_1=1, x_2=2, x_3=1, x_4=-1$.

3. Znaleźć wielomian charakterystyczny $c(\lambda)$ macierzy

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

i obliczyć macierz $c(\mathbf{A})$.
Obliczamy wielomian charakterystyczny macierzy. Rachunki:

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 3 & -3-\lambda & 6 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{k1+k2}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ -\lambda & -3-\lambda & 6 \\ 0 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3-\lambda & 6 \\ 0 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -\lambda^2(\lambda-2). \end{aligned}$$

Zatem $c(\mathbf{A})=-\mathbf{A}^2(\mathbf{A}-2\mathbf{I})$. Należy obliczyć:

$$\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 6 & -6 & 12 \\ 4 & -4 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}-2\mathbf{I}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

i wymnożyć te macierze (kolejność obojętna!). Otrzymamy macierz zerową.

ZESTAW IV

1. Obliczyć (przedstawić w postaci algebraicznej) i zaznaczyć na płaszczyźnie Gaussa:

$$\sqrt[4]{\frac{-18}{1+i\sqrt{3}}}$$

Znajdujemy postać trygonometryczną liczby podpierwiastkowej z. Można:
– wykonać najpierw dzielenie liczb w postaci algebraicznej uzyskując $z = \frac{9}{2}(-1+i\sqrt{3}) = 9(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi)$;
– zapisać licznik i mianownik w postaci trygonometrycznej: $-18 = 18(\cos\pi + i\sin\pi)$, $1+i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi)$ i wykonać dzielenie liczb w postaci trygonometrycznej.
Korzystamy ze wzoru na pierwiastki:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

$$w_0 = \sqrt{3}\Big(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\Big) = \sqrt{3}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\Big) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w_1 = \sqrt{3}\Big(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\Big) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

Podobnie: $w_2 = -w_0 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $w_3 = -w_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$
Na rysunku powinien być widoczny kwadrat.

2. Dla jakich wartości a układ

$$\begin{array}{ccccccccc} ax &+& y &+& z &+& t &=& 1 \\ x &+& ay &+& z &+& t &=& a \\ x &+& y &+& az &+& t &=& a^2 \\ x &+& y &+& z &+& at &=& a^3 \end{array}$$

jest: a) nieoznaczony; b) sprzeczny.
Obliczamy wyznacznik główny układu. Najprościej tak: do 1 wiersza dodajemy pozostałe, wyłączamy $a+3$ przed wyznacznik, a potem odejmujemy $w1$ od $w2, w3, w4$.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3$$

Można też po prostu odjąć np. $w1$ i $w2$, a potem do $k2$ dodać $k1$; dalej już rozwijać wg pierwszego wiersza. (Jest mnóstwo prostych wariantów).
Wyznacznik jest równy 0 dla $a = -3$ lub $a = 1$. Dla $a = -3$ układ jest sprzeczny; wystarczy np. zauważyć, że sumując wszystkie równania otrzymamy $0 = 34$, natomiast dla $a = 1$ wszystkie równania są jednakowe: $x+y+z+t = 1$, więc układ jest nioznaczony (rozwiązanie zależy od trzech parametrów).

3. Dane są macierze:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jakim przekształceniom odpowiadają te macierze? Znaleźć $h = f_A \circ f_B$. Wyznaczyć h^{-1}.
Macierzy $\mathbf{A}$ odpowiada przekształcenie
$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f_A(x, y, z) = (x + y - 2z, 3x - y + 2z)$,
a macierzy $\mathbf{B}$ odpowiada przekształcenie
$f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f_B(x, y) = (2x - y, x + 2y, 2y)$.
Złożenie możemy obliczyć bezpośrednio, ale lepiej obliczyć iloczyn macierzy:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix},$$

i stąd $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x, y) = (3x - 3y, 5x - y)$.
Również h^{-1} najlepiej wyznaczyć posługując się macierzą odwrotną (którą można obliczyć dowolną metodą).

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{12} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

Zatem $h^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h^{-1}(x, y) = (-\frac{1}{12}x + \frac{1}{4}y, -\frac{5}{12}x + \frac{1}{4}y)$.