Maciej Grzesiak
Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej

Ubezpieczenia życiowe

1. Z historii ubezpieczeń

W uproszczeniu mówiąc mamy dwa tradycyjne modele ubezpieczeń. Pierwszy ma źródło w towarzystwach pomocy wzajemnej. Jego cechą jest solidarność w kłopotach i wzajemność. Nie ma związku pomiędzy kosztem ubezpieczenia, prawdopodobieństwem wystąpienia szkody i wysokością świadczenia. Pierwsze wzmianki o tego typu zrzeszeniach pochodzą ze starożytnego Egiptu i Mezopotamii (2500 p.n.e.). W średniowieczu członkowie cechów rzemieślniczych i gildii kupieckich nieśli sobie pomoc w przypadku różnych zdarzeń losowych. Pomoc wzajemną organizowały też bractwa czeladnicze. Powstawały kasy ogniowe udzielające wsparcia na wypadek pożaru. Michel Albert w książce *Kapitalizm kontra kapitalizm* nazywa ten model alpejskim, bo w XVI wieku górale alpejscy tworzyli powszechnie towarzystwa pomocy wzajemnej. Stał się on podstawą ubezpieczeń emerytalnych, wprowadzonych pod koniec XIX wieku w Niemczech. Drugi model Albert nazywa anglosaskim, a wywodzi się on z tradycji morskich, początkowo włoskich, ale głównie londyńskich za sprawą ubezpieczania ładunków herbaty w kawiarnii Lloyda. W tym modelu mamy dwie strony transakcji, która trochę przypomina zakład: jeśli statek dopłynie, to właściciel traci swoją stawkę, a jeśli nie, to druga strona płaci jej wielokrotność. Liczy się tu interes stron, nie ma tu osób trzecich i solidarności. Ważne za to staje się oszacowanie ryzyka.
Ubezpieczenia życiowe rozwijały się wolniej od majątkowych, gdyż brak było danych pozwalających określić ryzyko śmierci.
Pierwszy nowoczesny system ubezpieczeniowy (oparty na zasadach aktuarialnych) utworzyli w 1748 wieku Robert Wallace i Alexander Webster, przy pomocy Colina Maclaurina. Był to *The Scottish Ministers' Widows' Fund.*
Definicja ubezpieczenia. *Ubezpieczenie można zdefiniować jako instytucję ekonomiczną opartą na zasadzie wzajemności, powołaną w celu gromadzenia funduszy potrzebnych w przypadku wystąpienia zdarzenia losowego, którego prawdopodobieństwo da się oszacować.*

2. Ubezpieczenia życiowe

Przy ubezpieczeniach życiowych mamy do czynienia z jednorazową wypłatą sumy ubezpieczenia. Moment jej wypłaty i wielkość wypłaty może być funkcją zmiennej losowej T — a więc czas wypłaty i kwota wypłaty mogą być także zmiennymi losowymi. Wartość teraźniejszą wypłaty oznaczamy Z; jest ona obliczana na bazie ustalonej stopy procentowej r (tzw. *techniczna stopa procentowa*). Oczekiwana wartość teraźniejsza wypłaty, $\mathrm{E}(Z)$, nazywana jest jednorazową składką netto (*net single premium*). Ta składka jednak nie odzwierciedla ryzyka, które ponosi ubezpieczyciel. Aby to ryzyko oszacować potrzebne są inne charakterystyki zmiennej losowej Z, np. wariancja.

2.1. Podstawowe typy ubezpieczeń

Podstawowymi typami ubezpieczeń są *ubezpieczenia na życie* i *czasowe ubezpieczenia na życie* (ang.: *whole life insurance, term insurance*).

Rozważmy ubezpieczenie na życie, tzn. takie, które wypłaca 1 jp. na koniec roku śmierci. Tak więc kwota wypłaty jest ustalona, ale moment wypłaty $K+1$ jest losowy. Wartość teraźniejsza wynosi

$$Z = \upsilon^{K+1}.$$

Zmienna Z przyjmuje wartości $\upsilon, \upsilon^2, \upsilon^3, \ldots$ i rozkład zmiennej Z jest określony rozkładem K:

$$\Pr(Z = \upsilon^{k+1}) = \Pr(K = k) = {}_kp_x q_{x+k},$$

dla $k = 0, 1, 2, \ldots$.
Jednorazową składkę netto (JSN) oznaczymy A_x:

$$A_x = \mathrm{E}[\upsilon^{K+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}.$$

Wariancję zmiennej Z obliczymy ze wzoru:

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{E}(Z^2) - (A_x)^2.$$

Ponieważ $\upsilon = e^{-\delta}$, gdzie δ jest intensywnością oprocentowania, więc

$$\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{E}(\upsilon^{2(K+1)}) = \mathrm{E}(e^{-2\delta(K+1)}),$$

a więc jest to jednorazowa składka netto obliczona przy dwukrotnie większej intensywności oprocentowania. Wobec tego

$$\mathrm{Var}(Z) = {}^2A_x - \Big(A_x\Big)^2.$$

Zatem obliczenie wariancji nie jest trudniejsze niż obliczenie składki netto.
Przykład. Obliczyć A_{30}, jeżeli czas życia spełnia prawo de Moivre'a z $\omega = 100$, tzn. T_{30} ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 70]$ oraz $\upsilon = 0,95$ (odpowiada to $r = 5,26\%$).
Ponieważ $\Pr(K = k) = \frac{1}{70}$, więc

$$A_{30} = \frac{1}{70}\sum_{k=0}^{69} 0{,}95^{k+1} = \frac{1}{70}\frac{0{,}95 - 0{,}95^{71}}{0{,}05} = 0,2639.$$

Przykład. Obliczyć wariancję zmiennej Z z poprzedniego przykładu.
Intensywność oprocentowania $\delta = \ln(1+r) = \ln \upsilon$, więc czynnik dyskontujący dla 2δ wynosi $0,95^2$, zatem

$${}^2A_{30} = \frac{1}{70}\frac{0{,}95^2 - 0{,}95^{142}}{1 - 0{,}95^2} = 0,132134,$$

a następnie $\mathrm{Var}(Z) = 0,0625 \approx \frac{1}{16}$.
Ubezpieczenie, które zapewnia wypłatę tylko wtedy, gdy śmierć nastąpi w ciągu n lat nazywamy *czasowym (terminowym) ubezpieczeniem na życie* z czasem trwania n. Np. 1 jp. jest wypłacana tylko, gdy śmierć nastąpi w ciągu pierwszych n lat; terminem wypłaty jest koniec roku śmierci. Mamy zatem:

$$Z = \begin{cases} \upsilon^{K+1} & \text{dla} \quad K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ 0 & \text{dla} \quad K = n, n+1, \ldots \end{cases}$$

Składkę netto oznaczymy $A^1_{x:\overline{n}|}$.

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \upsilon^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}.$$

Tak jak poprzednio, drugi moment $\mathrm{E}(Z^2)$ jest równy jednorazowej składce przy podwojonej intensywności oprocentowania, co wynika z tego, że:

$$Z^2 = \begin{cases} e^{-2\delta(K+1)} & \text{dla} \quad K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ 0 & \text{dla} \quad K = n, n+1, \ldots \end{cases}$$

2.2. Ubezpieczenie na dożycie

Ubezpieczenie na dożycie (ang.: *pure endowment*) z czasem trwania n zapewnia wypłatę sumy ubezpieczenia tylko wtedy, gdy ubezpieczony żyje po n latach. Wartość teraźniejsza wypłaty wynosi więc:

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad K = 0, 1, \dots, n-1 \\ \upsilon^n & \text{dla} \quad K = n, n+1, \dots \end{cases}$$

Składkę netto oznaczamy teraz $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$.

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \upsilon^n {}_np_x.$$

Wariancja zmiennej Z ma wartość

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{E}(Z^2) - (\mathrm{E}Z)^2 = \upsilon^{2n} {}_np_x - \upsilon^{2n} {}_np_x^2 = \upsilon^{2n} {}_np_x \cdot {}_nq_x.$$

2.3. Ubezpieczenie na życie i dożycie

W ubezpieczeniu na życie i dożycie (ang.: *endowment*) suma ubezpieczenia jest płatna na koniec roku śmierci, jeśli ta nastąpi w ciągu n lat, lub na koniec n-tego roku:

$$Z = \begin{cases} \upsilon^{K+1} & \text{dla} \quad K = 0, 1, \dots, n-1 \\ \upsilon^n & \text{dla} \quad K = n, n+1, \dots \end{cases}$$

Jednorazową składkę netto oznaczamy $A_{x:\overline{n}|}$.
Jak widać, zmienna Z jest sumą zmiennych odpowiadających ubezpieczeniu na życie (Z_1) i ubezpieczeniu na dożycie (Z_2):

$$Z = Z_1 + Z_2.$$

Zatem

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}},$$

oraz

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(Z_1) + 2\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) + \mathrm{Var}(Z_2).$$

Ale

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) &= \mathrm{E}[(Z_1 - \mathrm{E}(Z_1))(Z_2 - \mathrm{E}(Z_2))] = \\ &= \mathrm{E}[Z_1Z_2 - Z_1\mathrm{E}(Z_2) - \mathrm{E}(Z_1)Z_2 + \mathrm{E}(Z_1)\mathrm{E}(Z_2)] = \\ &= \mathrm{E}(Z_1Z_2) - \mathrm{E}(Z_1)\mathrm{E}(Z_2) = -\mathrm{E}(Z_1)\mathrm{E}(Z_2) = \\ &= -A^1_{x:\overline{n}|} \cdot A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}. \end{aligned}$$

Zatem ostatecznie

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(Z_1) + \mathrm{Var}(Z_2) - 2A^1_{x:\overline{n}|} \cdot A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}.$$

Stąd wynika, że ryzyko przy sprzedaży ubezpieczenia na życie i dożycie jest mniejsze niż przy sprzedaży ubezpieczenia na życie jednej osobie, a na dożycie — drugiej.
Uwaga. Zakładamy (dla prostoty), że suma ubezpieczenia wynosi 1. Gdyby suma wynosiła C, to jednorazową składkę netto należy pomnożyć przez C, a wariancję — przez C^2.
Rozważmy jeszcze bezterminowe ubezpieczenia na życie odroczone na m lat:

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad K = 0, 1, \dots, m-1 \\ \upsilon^{K+1} & \text{dla} \quad K = m, m+1, \dots \end{cases}$$

Składkę dla tego ubezpieczenia oznaczamy ${}_{m|}A_x$. Mamy

$${}_{m|}A_x = {}_mp_x \upsilon^m A_{x+m},$$

oraz także

$${}_{m|}A_x = A_x - A^1_{x:\overline{m}|}.$$

Tak jak w przypadku zwykłym (bez odroczenia) drugi moment $\mathrm{E}(Z^2)$ równy jest jednorazowej składce netto przy dwukrotnie większej intensywności oprocentowania.

2.4. Ubezpieczenie płatne w momencie śmierci

Do tej pory zakładaliśmy, że suma ubezpieczenia jest płatna na koniec roku śmierci. To założenie pozwala na wyprowadzenie wzorów bezpośrednio z tablic trwania życia, ale nie jest realistyczne. Załóżmy teraz, że wypłata następuje w momencie śmierci, tj. w chwili T. Wartością bieżącą kwoty 1 płatną w momencie T jest

$$Z = v^T.$$

Składkę netto dla tego ubezpieczenia oznaczamy $\bar{A}_x$. Ponieważ, jak wiemy:

$$\Pr(t < T < t + dt) = {}_tp_x\mu_{x+t}dt,$$

tj. $g(t) = {}_tp_x\mu_{x+t}$, więc

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t{}_tp_x\mu_{x+t}dt.$$

Przykład. W ubezpieczeniu x-latka wypłata kwoty 1 następuje w momencie śmierci, i wiadomo, że odchylenie standardowe wartości obecnej równa się JSN dla tego ubezpieczenia. Obliczyć tę składkę przy założeniu, że długość życia ma rozkład wykładniczy.

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t{}_tp_x\mu_{x+t}dt = \int_0^\infty e^{-\delta t}e^{-\mu t}\mu dt = \frac{\mu}{\mu+\delta},$$

oraz

$$\mathrm{Var}(Z) = {}^2\bar{A}_x - \left(\bar{A}_x\right)^2 = \frac{\mu}{\mu+2\delta} - \left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\right)^2.$$

Z równości odchylenia standardowego i JSN mamy:

$$\frac{\mu}{\mu+2\delta} - \left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\right)^2,$$

skąd

$$\frac{\mu}{\delta} = \sqrt{2} - 1.$$

Zatem

$$\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu+\delta} = \frac{\frac{\mu}{\delta}}{\frac{\mu}{\delta}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1+1} = 0,2929.$$

Praktyczny wzór przybliżony dla $\bar{A}_x$ można znaleźć zakładając, że ${}_uq_x$ jest liniową funkcją u, dla $0 < u < 1$ (*Założenie a*). Wtedy, ponieważ

$$T = K + S = (K+1) - (1-S),$$

oraz z założenia K i S są niezależne i S ma rozkład jednostajny, więc

$$v^T = v^{K+1}v^{-(1-S)} = v^{K+1}(1+r)^{1-S},$$

a ponieważ

$$\mathrm{E}((1+r)^{1-S}) = \int_0^1 (1+r)^u du = \bar{s}_{\overline{1}|} = \frac{r}{\delta},$$

zatem ostatecznie

$$\bar{A}_x = \mathrm{E}(v^{K+1})\mathrm{E}((1+r)^{1-S}) = \frac{r}{\delta}A_x.$$

Podobny wzór można wyprowadzić dla ubezpieczeń terminowych.
Dla ubezpieczenia na życie i dożycie czynnik $\frac{r}{\delta}$ pojawia się tylko w części dotyczącej ubezpieczenia terminowego:

$$\begin{aligned}\bar{A}_{x:\overline{n}|} &= \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{r}{\delta}A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \\ &= A_{x:\overline{n}|} + (\frac{r}{\delta} - 1)A^1_{x:\overline{n}|}.\end{aligned}$$

2.5. Ubezpieczenie płatne na koniec miesiąca śmierci

Załóżmy teraz, że suma ubezpieczenia jest płatna na koniec m-tej części roku (np. na koniec miesiąca), w której następuje śmierć, tj. w chwili $K + S^{(m)}$, gdzie

$$S^{(m)} = \frac{1}{m} \cdot [mS + 1],$$

(czyli $S^{(m)}$ otrzymujemy z S przez zaokrąglenie w górę do następnej wielokrotności liczby $\frac{1}{m}$).
Zatem dla ubezpieczenia na życie o sumie 1 mamy:

$$Z = v^{K+S^{(m)}}.$$

Zakładając, że ${}_uq_x$ jest liniowe dla $0 < u < 1$ (*Założenie a*), mamy, analogicznie jak wyżej

$$K + S^{(m)} = (K+1) - (1 - S^{(m)}),$$

$$\mathrm{E}((1+r)^{1-S^{(m)}}) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(1+r)^{1-\frac{k}{m}} = s^{(m)}_{\overline{1}|} = \frac{r}{r^{(m)}}.$$

Otrzymujemy:

$$A^{(m)}_x = \mathrm{E}(v^{K+1})\mathrm{E}\left((1+r)^{1-S^{(m)}}\right) = \frac{r}{r^{(m)}}A_x.$$

Przy $m \to \infty$ mamy znaną już równość:

$$\bar{A}_x = \frac{r}{\delta}A_x.$$

Przykład. Za jednorazową składkę netto można kupić polisę wypłacającą kwotę K na koniec roku śmierci lub polisę o tej samej wartości płatną na koniec kwartału śmierci. Techniczna stopa procentowa wynosi 5%. O ile procent droższa jest druga polisa?
Ponieważ

$$\frac{A^{(4)}_x}{A_x} = \frac{r}{r^{(4)}},$$

więc

$$\frac{A^{(4)}_x}{A_x} = \frac{0,05}{4(\sqrt[4]{1,05}-1)} = 1,0186.$$

Zatem polisa jest droższa o 1,86%.

3. Ogólne typy ubezpieczeń życiowych

Rozważmy ubezpieczenie, w którym wypłata jest zmienna i załóżmy, że suma ubezpieczenia jest płatna na koniec roku śmierci. Jeżeli c_j jest sumą ubezpieczenia dla j-tego roku, to

$$Z = c_{K+1}v^{K+1}.$$

Rozkład zmiennej Z, składkę netto i wyższe momenty tej zmiennej łatwo obliczyć. Mamy:

$$\mathrm{E}(Z^h) = \sum_{k=0}^{\infty} c^h_{k+1}v^{h(k+1)}{}_kp_x q_{x+k}, \qquad h = 1, 2, \ldots.$$

Można takie zmienne ubezpieczenie traktować jako kombinację odroczonych ubezpieczeń na życie, z których każde ma stałą wartość. Zatem

$$\mathrm{E}(Z) = c_1A_x + (c_2 - c_1){}_{1|}A_x + (c_3 - c_2){}_{2|}A_x + \ldots$$

W przypadku ubezpieczenia terminowego:

$$Z = \begin{cases} c_{K+1}v^{K+1} & \text{dla} \quad K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ 0 & \text{dla} \quad K = n, n+1, \ldots \end{cases}$$

To ostatnie ubezpieczenie można także przedstawić jako kombinację ubezpieczeń czasowych rozpoczynających się teraz:

$$\mathrm{E}(Z) = c_n A^1_{x:\overline{n}|} + (c_{n-1} - c_n) A^1_{x:\overline{n-1}|} + \cdots + (c_2 - c_3) A^1_{x:\overline{2}|} + (c_1 - c_2) A^1_{x:\overline{1}|}.$$

Takie równości mogą być przydatne do obliczenia składki netto, ale nie do obliczenia wyższych momentów Z.
W przypadku ubezpieczeń płatnych w chwili śmierci, sumę ubezpieczenia traktujemy jako funkcję $c(t)$, $t \geqslant 0$. Zatem

$$Z = c(T)v^T.$$

Jednorazowa składka netto wynosi:

$$\mathrm{E}(Z) = \int_0^\infty c(t) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt.$$

Przykład. Na osobę w wieku x lat wystawiono bezterminową polisę dającą wypłatę 160 w momencie śmierci. Dalsze trwanie życia x-latka opisuje funkcja gęstości

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{t+10}{6000} & \text{gdy } 0 \leqslant t \leqslant 100 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

Wyznacz jednorazową składkę netto przy natężeniu oprocentowania $\delta = 0,2$.
Rozwiązanie.

$$\begin{aligned} 160\bar{A}_x &= 160 \textstyle\int_0^{100} e^{-0,2t} \frac{t+10}{6000} \, \mathrm{d}\, t = \frac{2}{75} \int_0^{100} e^{-0,2t}(t+10) \, \mathrm{d}\, t = \\ &= \tfrac{2}{75}(-5)(t+15)e^{-0,2t}|_0^{100} = 2 - \tfrac{46}{3e^{20}} \approx 2. \end{aligned}$$

Przykład. Na x-latka wystawiono polisę, która po 10 latach odroczenia daje 40-letnie ubezpieczenie na życie ze świadczeniem w wysokości 10, płatnym w momencie śmierci. Wyznacz wariancję wypłat z tej polisy według ich wartości na moment wystawienia polisy, jeśli:
(i) natężenie zgonów jest stałe: $\mu_{x+t} = 0,05$;
(ii) natężenie oprocentowania wynosi $\delta = 0,05$.
Wartość obecna wypłaty jest zmienną losową $10Z$, gdzie:

$$Z = \begin{cases} v^T & \text{gdy } 10 \leqslant T < 50 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

Obliczamy momenty zmiennej:

$$\mathrm{E}Z = \int\limits_{10}^{50} e^{-0,05t} e^{-0,05t} 0,05 dt = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-5}),$$

$$\mathrm{E}(Z^2) = \int\limits_{10}^{50} e^{-0,1t} e^{-0,05t} 0,05 dt = \frac{1}{3}(e^{-1,5} - e^{-7,5}).$$

Zatem

$$\mathrm{Var}(10Z) = 25(\frac{4}{3}e^{-1,5} - \frac{4}{3}e^{-7,5} - e^{-2} + 2e^{-6} - e^{-10}) \approx 4{,}16.$$

Rzeczywiste obliczenie składki można zredukować do obliczeń w modelu dyskretnym. Mamy:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}(Z|K=k)\cdot \Pr(K=k) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}(c(k+S)\upsilon^{k+S}|K=k)\cdot \Pr(K=k) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}(c(k+S)(1+r)^{1-S}|K=k)\upsilon^{k+1}\Pr(K=k).
\end{aligned}$$

Zatem określając

$$c_{k+1} = \mathrm{E}[c(k+S)(1+r)^{1-S}|K=k],$$

otrzymujemy:

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}\upsilon^{k+1}{}_k p_x q_{x+k}.$$

Oczywiście aby obliczyć c_{k+1} potrzebna jest znajomość rozkładu warunkowego S pod warunkiem $K=k$. Właściwymi założeniami umożliwiającymi te obliczenia są *Założenie a* i *Założenie b*. Przy *Założeniu a*, tzn. gdy ${}_u q_{x+k}$ jest liniowe, $\mu_{x+k+u} = \frac{q_{x+k}}{1-uq_{x+k}} = \frac{q_{x+k}}{{}_u p_{x+k}}$, mamy

$$\begin{aligned}
c_{k+1} &= \left(\int_0^1 c(k+u)(1+r)^{1-u}{}_{k+u}p_x\mu_{x+k+u}du\right) : ({}_k p_x q_{x+k}) = \\
&= \frac{1}{q_{x+k}}\int_0^1 c(k+u)(1+r)^{1-u}{}_u p_{x+k}\cdot \mu_{x+k+u}du \overset{\text{Zał.a}}{=} \\
&= \frac{1}{q_{x+k}}\int_0^1 c(k+u)(1+r)^{1-u}q_{x+k}du = \\
&= \int_0^1 c(k+u)(1+r)^{1-u}du.
\end{aligned}$$

Założenie b, tj. $\mu_{x+k+u} = \mu_{x+k+\frac{1}{2}}, {}_u p_{x+k} = (p_{x+k})^u$ daje natomiast:

$$\begin{aligned}
c_{k+1} &= \frac{1}{q_{x+k}}\int_0^1 c(k+u)(1+r)^{1-u}(p_{x+k})^u\mu_{x+k+\frac{1}{2}}du = \\
&= \int_0^1 c(k+u)(1+r)^{1-u}\frac{(p_{x+k})^u\mu_{x+k+\frac{1}{2}}}{1-p_{x+k}}du.
\end{aligned}$$

Przykładowo, załóżmy, że suma ubezpieczenia rośnie wykładniczo, tzn.:

$$c(t) = e^{\tau t}.$$

Wtedy przy *Założeniu a* otrzymujemy:

$$c_{k+1} = \int_0^1 e^{\tau(k+u)}(1+r)^{1-u}du = e^{\tau k+\delta}\int_0^1 e^{(\tau-\delta)u}du = e^{\tau k}\frac{e^{\delta}-e^{\tau}}{\delta-\tau}.$$

Zauważmy, że dla $\tau = 0$ otrzymujemy znany wynik $c_{k+1} = \frac{e^{\delta}-1}{\delta} = \frac{r}{\delta}$.
Przy *Założeniu b* :

$$\begin{aligned}
c_{k+1} &= \int_0^1 e^{\tau(k+u)}e^{\delta(1-u)}\frac{\mu_{x+k+\frac{1}{2}}}{1-p_{x+k}}e^{u\ln p_{x+k}}du = \\
&= \frac{\mu_{x+k+\frac{1}{2}}}{1-p_{x+k}}e^{\tau k+\delta}\int_0^1 e^{u(\tau-\delta+\ln p_{x+k})}du = \\
&= \frac{\mu_{x+k+\frac{1}{2}}}{1-p_{x+k}}e^{\tau k+\delta}\frac{1}{\tau-\delta+\ln p_{x+k}}[e^{\tau-\delta+\ln p_{x+k}}-1] = \\
&= \frac{\mu_{x+k+\frac{1}{2}}}{1-p_{x+k}}e^{\tau k}\frac{e^{\tau}p_{x+k}-e^{\delta}}{\tau-\delta+\ln p_{x+k}} = \\
&= \frac{\mu_{x+k+\frac{1}{2}}}{1-p_{x+k}}e^{\tau k}\frac{e^{\delta}-p_{x+k}e^{\tau}}{\delta-\tau-\mu_{x+k+\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Wzory obowiązują oczywiście tylko wtedy, gdy mianowniki są niezerowe. Jeżeli np. $\delta = \tau$, to przy *Założeniu a* mamy

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= \int_0^1 e^{\delta(k+u)} e^{\delta(1-u)} du = \\ &= \int_0^1 e^{\delta(k+1)} du = e^{\delta(k+1)}. \end{aligned}$$

3.1. Standardowe typy ubezpieczeń życiowych ze zmienną sumą

Będziemy zakładać, że suma ubezpieczenia jest płatna na koniec roku śmierci. Rozważmy standardowe rosnące ubezpieczenie na życie, w którym $c_j = j$. Wartość teraźniejsza wypłaty jest zmienną losową:

$$Z = (K+1)v^{K+1}.$$

Jednorazowa składka netto wynosi:

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}.$$

W przypadku n-letniego ubezpieczenia terminowego:

$$Z = \begin{cases} (K+1)v^{K+1} & , \quad K = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & , \quad K = n, n+1, \dots \end{cases}$$

a składka netto wynosi:

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}.$$

Tę składkę można potraktować jako sumę składek dla ubezpieczeń odroczonych:

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = A_x + {}_{1|}A_x + \dots + {}_{n-1|}A_x - n_{n|}A_x,$$

lub też

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = nA^1_{x:\overline{n}|} - A^1_{x:\overline{n-1}|} - A^1_{x:\overline{n-2}|} - \dots - A^1_{x:\overline{1}|}.$$

Zauważymy też, że składka dla n-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie wynosi:

$$(IA)_{x:\overline{n}|} = (IA)^1_{x:\overline{n}|} + nA_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$$

W *standardowym ubezpieczeniu malejącym* suma ubezpieczenia zmniejsza się od n do 0. Dokładniej, wartość teraźniejsza wypłaty to:

$$Z = \begin{cases} (n-K)v^{K+1} & , \quad K = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & , \quad K = n, n+1, \dots \end{cases}$$

Tego typu ubezpieczenia są powszechnie stosowane przy spłacie kredytów (o ile dług, zgodnie z planem amortyzacji, również maleje liniowo). Mamy:

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k},$$

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A^1_{x:\overline{n-1}|} + A^1_{x:\overline{n-2}|} + \dots + A^1_{x:\overline{1}|}.$$

Załóżmy teraz, że suma ubezpieczenia jest płatna w chwili śmierci, tj.

$$Z = c(T)v^T.$$

Jeśli suma ubezpieczenia rośnie corocznie, a dokładniej $c(t) = [t+1]$, to

$$Z = (K+1)v^T.$$

Aby wyliczyć składkę $(I\bar{A})_x$ należy obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej:

$$Z = (K+1)\upsilon^{K+1}(1+r)^{1-S}.$$

Przy *Założeniu a* zmienne K i S są niezależne oraz $\mathrm{E}((1+r)^{1-S}) = \frac{r}{\delta}$, zatem

$$(I\bar{A})_x = \frac{r}{\delta}(IA)_x.$$

W sytuacji, gdy suma ubezpieczenia jest zwiększana q razy w roku, za każdym razem o $\frac{1}{q}$, mamy:

$$Z = (K + S^{(q)})\upsilon^T,$$

i po rachunkach otrzymamy:

$$(I^{(q)}\bar{A})_x = (I\bar{A})_x - \bar{A}_x + \frac{r - d^{(q)}}{d^{(q)}\delta} A_x.$$

3.2. Wzory rekurencyjne

Wykażemy, że

$$A_x = \upsilon q_x + \upsilon A_{x+1} p_x$$

D o w ó d.

$$\begin{aligned}
A_x &= \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^{k+1}{}_k p_x q_{x+k} = \\
&= \upsilon q_x + \upsilon \sum_{k=1}^{\infty} \upsilon^k{}_k p_x q_{x+k} = \\
&= \upsilon q_x + \upsilon \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^{k+1}{}_{k+1} p_x q_{x+k+1} = \\
&= \upsilon q_x + \upsilon p_x \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^{k+1}{}_k p_{x+1} q_{x+k+1} = \\
&= \upsilon q_x + \upsilon p_x A_{x+1}.
\end{aligned}$$

Interpretacja: Składka netto dla x-latka jest wartością oczekiwaną zmiennej losowej określonej jako zdyskontowana suma ubezpieczenia w przypadku śmierci, i jako zdyskontowana składka netto dla $x+1$-latka w przypadku przeżycia.
Przepisując wzór jako

$$A_x = \upsilon A_{x+1} + \upsilon(1 - A_{x+1})q_x,$$

widzimy, że składka A_{x+1} jest zachowana w obu przypadkach (życia lub śmierci), a ponadto w przypadku śmierci konieczna jest dodatkowa kwota $1 - A_{x+1}$ aby wypłacić świadczenie.
Ogólniej, mamy dla $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$A_{x+k} - \upsilon A_{x+k+1} = \upsilon(1 - A_{x+k+1})q_{x+k}.$$

Mnożąc przez υ^k i sumując po k otrzymamy:

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^k \upsilon(1 - A_{x+k+1})q_{x+k}.$$

Zauważmy, że $\upsilon(1-A_{x+k+1})q_{x+k}$ jest składką netto dla ubezpieczenia rocznego.