Maciej Grzesiak
Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej

Liczby zespolone

1. Określenie liczb zespolonych

W starożytności okazało się, że zbiór liczb wymiernych jest niewystarczający, bo nie ma takiej liczby wymiernej, która byłaby długością przekątnej kwadratu o boku 1. Doprowadziło to rozważania liczb niewymiernych, np. $\sqrt{2}$.
W XVI wieku okazało się, że zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych jest też niewystarczający. Mianowicie odkryte wtedy metody rozwiązywania równań stopnia 3 wymagają niekiedy obliczenia pierwiastka liczby ujemnej.
Np. równanie

$$x^3 = 15x + 4$$

można obecnie rozwiązać zauważając, że pierwiastkiem tego równania jest $x = 4$; dzieląc następnie $x^3 = 15x + 4$ przez $x - 4$, otrzymujemy $x^2 + 4x + 1$ i łatwo obliczymy pozostałe pierwiastki tego równania, którymi są $-2 \pm \sqrt{3}$. Nie jest to jednak metoda, którą można rozwiązać każde równanie.
W XVI wieku odkryto wzory na pierwiastki równania stopnia 3, nazywane obecnie wzorami Cardana. Na mocy tych wzorów równanie $x^3 = 15x + 4$ ma rozwiązanie wyrażające się wzorem:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Te wzory wymagają obliczenia pierwiastka z liczby ujemnej. Wśród liczb rzeczywistych pierwiastek z liczby ujemnej jednak nie istnieje. Wyjście z tej sytuacji znaleziono, zakładając istnienie takich liczb jak $\sqrt{-1}$. Nazwano je liczbami urojonymi, bo trudno było uzasadnić ich byt. Stosowano do nich zwykłe prawa algebry.
Na przykład, jeśli i oznacza $\sqrt{-1}$, to

$$\sqrt{-121} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{121} = 11\,\mathrm{i}\,.$$

Można także obliczyć, że:

$$(2 + \mathrm{i})^3 = 2 + 11\,\mathrm{i}, \qquad (2 - \mathrm{i})^3 = 2 - 11\,\mathrm{i},$$

zatem $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = (2 + \mathrm{i}) + (2 - \mathrm{i}) = 4$.
Spostrzeżenie, że równanie $x^2 = 2$ nie ma rozwiązania wymiernego doprowadziło do rozważania liczb, które teraz nazywamy niewymiernymi. Analogicznie, skoro równanie $x^2 = -1$ nie ma rozwiązania rzeczywistego, to wprowadzamy symbol i na oznaczenie pierwiastka równania $x^2 = -1$. Na liczbach postaci $a + b\,\mathrm{i}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, nazywanych *liczbami zespolonymi*, można wykonywać działania analogicznie jak na liczbach postaci $a + b\sqrt{2}$.
Pozostaje pytanie: czym właściwie jest i? Bo o ile $\sqrt{2}$ jest długością przekątnej kwadratu, to i nie ma tak prostej interpretacji.
Przez około 300 lat trwały spory o zasadność używania liczby(?) i. Formalne uznanie liczby zespolone zyskały w XIX wieku, gdy Hamilton określił liczby zespolone jako pary liczb rzeczywistych. Przedstawimy tę konstrukcję.
Tworzymy iloczyn kartezjański $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Jego elementami są pary liczb rzeczywistych. W zbiorze par wprowadzamy działania dodawania:

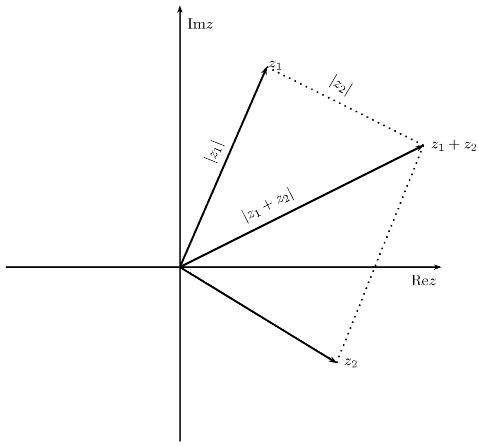
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

i mnożenia
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$
Parę $z = (a, b)$ będziemy nazywać *liczbą zespoloną*, a cały zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — zbiorem liczb zespolonych. Będziemy go oznaczać literą $\mathbb{C}$.
Zbiór $\mathbb{C}$ z wprowadzonymi wyżej działaniami ma własności podobne do zbioru liczb rzeczywistych — chodzi tu o własności działań: łączność, przemienność, istnienie elementu neutralnego, przeciwnego i odwrotnego, oraz rozdzielność. Łatwo zauważyć, że para $(0, 0)$ jest elementem zerowym dodawania, a para $(1, 0)$ jest elementem jednostkowym mnożenia. Również łatwo jest sprawdzić łączność dodawania i mnożenia, i przemienność tych działań. Elementem przeciwnym do (a, b) jest taka para (x, y), że $(a + x, b + y) = (0, 0)$; stąd $(x, y) = (-a, -b)$. Nieco trudniej jest wyliczyć element odwrotny. Załóżmy więc, że $z = (a, b)$ jest niezerową liczbą zespoloną, tj. $a^2 + b^2 > 0$ oraz że
$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0).$$
Wtedy, zgodnie z definicją mnożenia, musi być:
$$ax - by = 1, \qquad ay + bx = 0.$$
Rozwiązaniem tego układu jest para liczb
$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{-b}{a^2 + b^2},$$
a więc liczba zespolona
$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$
jest odwrotnością liczby z.
Sprawdzimy jeszcze rozdzielność mnożenia względem dodawania. Niech $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$, $z_3 = (e, f)$. Wtedy
$$\begin{aligned}(z_1 + z_2) \cdot z_3 &= (a + c, b + d)(e, f) = \\ &= ((a + c)e - (b + d)f, (b + d)e + (a + c)f) = \\ &= (ae + ce - bf - df, be + de + af + ef) = \\ &= (ae - bf, be + af) + (ce - df, de + cf) = \\ &= z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3.\end{aligned}$$
W pewnym sensie zbiór $\mathbb{C}$ zawiera zbiór $\mathbb{R}$. Formalnie $\mathbb{C}$ jest zbiorem par, ale jeśli rozważymy zbiór par postaci $(a, 0)$, to ponieważ zachodzą równości:
$$\begin{aligned}(a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0) \\ (a, 0) \cdot (b, 0) &= (ab, 0),\end{aligned}$$
więc pary takie można utożsamić z liczbami rzeczywistymi. Inaczej mówiąc mamy wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie
$$(a, 0) \leftrightarrow a$$
zbioru liczb zespolonych postaci $(a, 0)$ na zbiór liczb rzeczywistych.
W tym przyporządkowaniu liczbom 1 i -1 odpowiadają pary $(1, 0)$ i $(-1, 0)$. Jeśli wprowadzimy oznaczenie
$$i = (0, 1),$$
to liczba zespolona (a, b) daje się przedstawić za pomocą liczby i oraz liczb rzeczywistych $(a, 0)$ i $(b, 0)$. Mamy bowiem
$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi,$$
gdzie zamiast $(a, 0)$, $(b, 0)$ napisaliśmy krótko a, b.

Zauważmy, że
$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1.$$
W dalszym ciągu liczby zespolone będziemy zapisywać w postaci $a+bi$. Zapis ten pozwala przy działaniach arytmetycznych operować liczbami $a+bi$ jak wielomianami, przy czym należy zastępować i^2 przez -1. Na przykład:
$$(1+2i)(2-3i) = 1\cdot 2 - 1\cdot 3i + 2i\cdot 2 - 2i\cdot 3i = 2 - 3i + 4i - 6i^2 = 8 + i.$$

2. Własności liczb zespolonych

W prostokątnym układzie współrzędnych liczbę zespoloną $z = a+bi$ można interpretować jako punkt o odciętej a i rzędnej b.
Punkty rzeczywiste, tj. takie punkty $z = a+bi$, dla których $b = 0$, wypełniają oś układu zwaną *osią rzeczywistą*, zaś punkty, dla których $a = 0$ wypełniają drugą oś, zwaną *osią urojoną*.
Czasem wygodniej jest traktować liczbę $z = a+bi$ jako wektor zaczepiony w początku układu współrzędnych i końcu (a,b). Można zauważyć, że dodawanie liczb zespolonych jest (geometrycznie) dodawaniem wektorów.



Rysunek 1. Suma liczb zespolonych

Interpretacja mnożenia nie jest tak prosta.
Jeśli z jest wektorem, to ma długość, kierunek i zwrot. Długość wynosi $\sqrt{a^2+b^2}$. Nazywamy ją *modułem* bądź *wartością bezwzględną* liczby zespolonej z i oznaczamy $|z|$. Przykładowo:
$$|1+2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}, \qquad |3-4i| = \sqrt{9+16} = 5.$$
Zauważmy, że równość $|z| = 1$ jest spełniona przez te punkty płaszczyzny, które leżą na okręgu o środku w początku układu i promieniu 1. Nierówność $|z| < 1$ charakteryzuje punkty wewnątrz tego okręgu.
Przykład. Narysować zbiory
1) $|z-i| = 2$ (okrąg o środku $(0,1)$ i promieniu 2);
2) $2 < |z+1-2i| \leqslant 4$ (pierścień kołowy o środku $(-1,2)$ i promieniach 2 i 4, zewnętrznie domknięty);
3) $|z+3| = |z-2i|$ (zbiór punktów równodległych od punktów $A = (-3,0)$ i $B = (0,2)$, czyli symetralna odcinka AB).
Niech $z = a+bi$. Przyjmiemy oznaczenie
$$a - bi = \overline{z}.$$

Liczbę $\overline{z}$ nazywamy *sprzężoną* z liczbą z. Liczby sprzężone leżą symetrycznie względem osi rzeczywistej. Łatwo jest sprawdzić wzory:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Mamy także dla $z = a + bi$:

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Ostatnią własność wykorzystujemy przy dzieleniu liczb zespolonych. Wykonanie dzielenia polega na przedstawieniu ilorazu w postaci $a+bi$. Osiągniemy to, mnożąc licznik i mianownik przez liczbę sprzężoną do mianownika. Przykładowo:

$$\frac{1+2i}{3-4i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i+6i-8}{9+16} = \frac{-5+10i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Twierdzenie 1. *Dla dowolnych liczb zespolonych z_1 i z_2*

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$$

Jeśli dodatkowo $z_2 \neq 0$, to

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

D o w ó d. Pierwszy wzór wynika z równości:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2,$$

a drugi — z pierwszego, bo

$$|z_2| \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_2 \frac{z_1}{z_2}\right| = |z_1|. \blacksquare$$

Twierdzenie 2. *Dla dowolnych liczb zespolonych z_1 i z_2 zachodzą nierówności*

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,$$

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

Dowód analityczny pominiemy. Zauważmy jednak, że
i) jeśli wektory z_1 i z_2 są współliniowe, to wektor odpowiadający liczbie $z_1 + z_2$ ma długość będącą sumą, bądź różnicą długości wektorów z_1 i z_2;
ii) jeśli wektory z_1 i z_2 nie są współliniowe, to wektor odpowiadający liczbie $z_1 + z_2$ jest bokiem trójkąta, którego pozostałymi bokami są wektory odpowiadające liczbom z_1 i z_2. W trójkącie długość każdego boku jest mniejsza niż suma długości pozostałych boków. Stąd mamy pierwszą nierówność, którą nazywamy *nierównością trójkąta.*
Druga nierówność jest wnioskiem z pierwszej.
Niech $z = a + bi$. Wprowadzamy oznaczenia

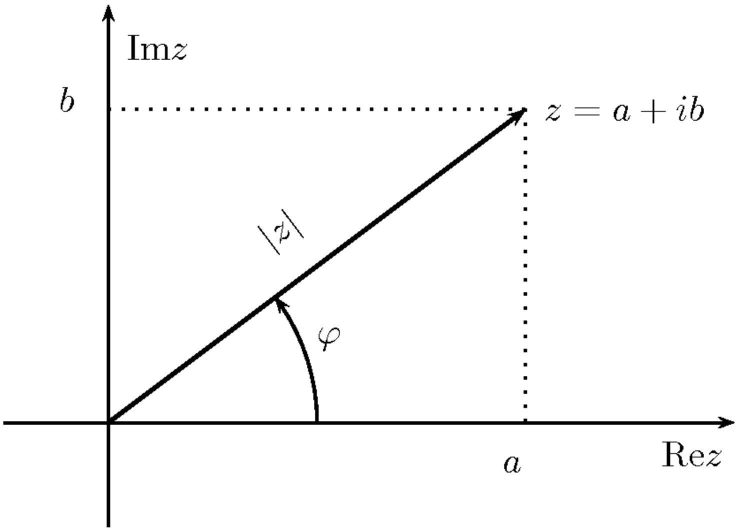
$$\operatorname{Re} z = a, \qquad \operatorname{Im} z = b.$$

Liczby $\operatorname{Re} z$ i $\operatorname{Im} z$ nazywamy odpowiednio *częścią rzeczywistą* i *częścią urojoną* liczby z.

3. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Kierunek i zwrot wektora $z = a + bi$ można określić, podając miarę φ kąta skierowanego, którego pierwszym ramieniem jest półoś rzeczywista dodatnia, a drugim ramieniem wektor z. Tę miarę nazwiemy *argumentem* liczby z. Jak wiadomo jest ona wieloznaczna i wyraża się wzorem:

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi, \qquad \text{gdzie:} \qquad 0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$



Rysunek 2. Moduł i argument liczby zespolonej

φ_0 nazywamy *argumentem głównym*. Oznaczamy:

$$\varphi_0 = \arg z, \qquad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Argumentem liczby 0 nazywamy dowolną liczbę φ.
Przykładowo: $\arg i = \frac{1}{2}\pi$, $\operatorname{Arg} i = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$, $\arg 1 = 0$, $\operatorname{Arg} 1 = 2k\pi$.
Odnotujmy, że liczby rzeczywiste dodatnie mają argument główny równy 0, a ujemne — równy π.
Po rozpatrzeniu odpowiedniego trójkąta prostokątnego otrzymamy:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

W takim razie

$$z = a + bi = |z|\left(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}\right) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Stąd otrzymujemy poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 3. *Każda liczba zespolona daje się przedstawić w postaci*

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

zwanej postacią trygonometryczną liczby z.

Na przykład

$$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0), \qquad i = 1 \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}),$$

$$1 + i = \sqrt{2} \cdot (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

Wiemy już, że mnożeniu (dzieleniu) liczb zespolonych odpowiada mnożenie (dzielenie) modułów tych liczb. Następujące twierdzenie wyjaśnia, co dzieje się z argumentami tych liczb.

Twierdzenie 4. *Dla dowolnych liczb zespolonych z_1 i z_2:*

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2. \tag{1}$$

U w a g a. Ponieważ $\operatorname{Arg} z$ nie jest określony jednoznacznie, więc powyższy wzór należy rozumieć następująco: do każdych dwóch wartości argumentów występujących we wzorze można dobrać trzecią wartość argumentu, tak aby zachodziła równość.
D o w ó d. Niech

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Wówczas

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= |z_1||z_2|(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \\ &\quad + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2) = \\ &= |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \blacksquare \end{aligned}$$

Podobnie udowadnia się następne dwa twierdzenia.

Twierdzenie 5. *Dla dowolnych liczb zespolonych z_1 i z_2, ($z_2 \neq 0$):*

$$\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \tag{2}$$

Twierdzenie 6. *Dla każdej liczby zespolonej z i każdego całkowitego n:*

$$\operatorname{Arg} z^n = n\cdot\operatorname{Arg} z. \tag{3}$$

W szczególności zachodzi tzw. *wzór de Moivre'a*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{4}$$

D o w ó d. Dla n naturalnego wzór (3) otrzymamy po wielokrotnym zastosowaniu wzoru (1). Gdy $n = 0$, to prawdziwość wzoru wynika z równości $\operatorname{Arg} 1 = 2k\pi$. Natomiast, gdy $n = -k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, to

$$\operatorname{Arg} z^n = \operatorname{Arg} z^{-k} = \operatorname{Arg}\frac{1}{z^k} = \operatorname{Arg} 1 - \operatorname{Arg} z^k = -k\operatorname{Arg} z = n\operatorname{Arg} z.\blacksquare$$

Przykłady.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{26} &= \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{26} = \cos\frac{26\pi}{4} + i\sin\frac{26\pi}{4} = \\ &= \cos\left(6\pi + \frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(6\pi + \frac{2\pi}{4}\right) = \\ &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-3} &= \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{-3} = \cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi) = \\ &= \cos 0 + i\sin 0 = 1. \end{aligned}$$

Jak widać potęgowanie jest łatwe, gdy znamy postać trygonometryczną liczby. Jeśli jej nie znamy, pozostaje *wzór dwumianowy Newtona*:

$$z^n = (a+bi)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} i^{n-k}.$$

4. Postać wykładnicza liczby zespolonej

4.1. Symbol $e^{i\varphi}$.

Określamy:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

W ten sposób został zdefiniowany pewien symbol. Uzasadnieniem celowości jego wprowadzenia są następujące własności, pokazujące, że można go traktować jako potęgę liczby e.
Własności symbolu $e^{i\varphi}$.
1. $e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$;
2. $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$;
3. $(e^{i\varphi})^k = e^{ik\varphi}$;
4. $e^{i(\varphi+2k\pi)} = e^{i\varphi}$;
5. $e^{i\varphi} \neq 0$;
6. $|e^{i\varphi}| = 1$;
7. $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$;

Przykłady. Obliczyć $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{2\pi i}$, e^{i}.

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{2}} &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i, \\ e^{2\pi i} &= \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1, \\ e^{i} &= \cos 1 + i\sin 1. \end{aligned}$$

4.2. Wzory Eulera

Ponieważ

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\sin\varphi \\ e^{-i\varphi} &= \cos\varphi - i\sin\varphi \end{aligned}$$

więc po dodaniu (odjęciu) stronami i podzieleniu przez 2 (odpowiednio $2i$) otrzymujemy tożsamości, nazywane *wzorami Eulera*:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{aligned}$$

Przykład. Wyrazić $\cos^2\varphi$ w zależności od $\cos 2\varphi$.

$$\cos^2\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2i\varphi} + 2 + e^{-2i\varphi}2\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^{2i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi).$$

4.3. Postać wykładnicza liczby

Definicja 1. Jeżeli φ jest argumentem liczby z, a r jej modułem, to $re^{i\varphi}$ nazywamy postacią wykładniczą liczby z.

Przykład. Rozwiązać równanie $z^2 = \bar{z}$.
Podstawiając $z = re^{i\varphi}$ otrzymujemy

$$r^2 e^{2i\varphi} = re^{-i\varphi},$$

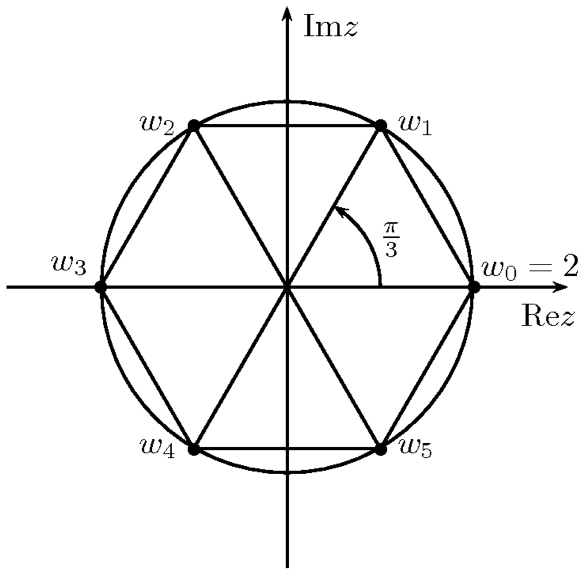
skąd mamy $r = 0$ lub $r = 1$ i $3i\varphi = 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$. Różne kąty otrzymujemy dla $k = 0, 1, 2$. Są to $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, $\varphi = \frac{4}{3}\pi$. Zatem są 4 rozwiązania:

$$z = 0, \quad z = 1 \cdot e^0, \quad z = 1 \cdot e^{\frac{2}{3}\pi i}, \quad z = 1 \cdot e^{\frac{4}{3}\pi i},$$

czyli
$$z = 0, \quad z = 1, \quad z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Przykład. Rozwiązać równanie $z^3 = (2+2i)^6$.
Przykład. Rozwiązać równanie $\frac{z^3}{|z|^3} = 1$.
Niech $z = re^{i\alpha}$. Wtedy
$$\frac{(re^{i\alpha})^3}{|re^{i\alpha}|^3} = 1,$$
$$e^{3i\alpha} = 1$$
$$3i\alpha = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$
Zatem r jest dowolne, a α ma 3 wartości: 0, $2\pi/3$, $4\pi/3$. Geometrycznie są to 3 półproste wychodzące z początku układu, nachylone do osi rzeczywistej pod kątami 0, $2\pi/3$, $4\pi/3$.

5. Pierwiastki z liczb zespolonych

Dla liczby rzeczywistej dodatniej a liczbę rzeczywistą dodatnią b taką, że $b^n = a$ nazywamy *pierwiastkiem arytmetycznym* z liczby a i oznaczamy $\sqrt[n]{a}$. Taka liczba jest tylko jedna.
W przypadku zespolonym, *pierwiastkiem stopnia* n z liczby z nazywamy taką liczbę w, że $w^n = z$. Jak zobaczymy, takich liczb jest dokładnie n (wyjątkiem jest 0, które ma jeden pierwiastek).
Rozważymy najpierw pierwiastki kwadratowe. Zacznijmy od przykładu. Znajdziemy pierwiastki kwadratowe liczby $z = 3 - 4i$.
Szukamy takiej liczby $w = x + iy$, że $(x+iy)^2 = 3 - 4i$, tzn.
$$x^2 + 2ixy - y^2 = 3 - 4i,$$
czyli
$$x^2 - y^2 = 3, \qquad 2xy = 4.$$
Po podstawieniu np. z drugiego równania $y = -2/x$ do pierwszego otrzymamy (po pomnożeniu przez x^2) równanie
$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0,$$
które ma dwa pierwiastki rzeczywiste $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Stąd $y_1 = -1$, $y_2 = 1$, więc pierwiastkami z $3 - 4i$ są liczby
$$w_1 = 2 - i, \qquad w_2 = -2 + i.$$
Rachunek powyższy można przeprowadzić w przypadku ogólnym, choć wymaga to rozróżnienia kilku przypadków. Wprowadzamy dla liczb rzeczywistych funkcję $\operatorname{sgn} x$ (czytaj: *signum*) wzorem:
$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x > 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \\ -1 & \text{dla} \quad x < 0. \end{cases}$$
Twierdzenie 7. *Każda liczba zespolona $z = a + bi \neq 0$ ma dwa różne pierwiastki drugiego stopnia, określone wzorami:*
$$\sqrt{z} = \begin{cases} \pm\sqrt{a} & \textit{dla} \quad b = 0, a \geqslant 0, \\ \pm\sqrt{-a}i & \textit{dla} \quad b = 0, a < 0, \\ \pm\left(\sqrt{\frac{a+|z|}{2}} + i\operatorname{sgn} b\sqrt{\frac{-a+|z|}{2}}\right) & \textit{dla} \quad b \neq 0. \end{cases}$$
Na przykład
$$\sqrt{3-4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{3+5}{2}} + i(-1)\sqrt{\frac{-3+5}{2}}\right) = \pm(2-i).$$
Obliczanie pierwiastków stopnia wyższego niż 2 wymaga postaci trygonometrycznej liczby z.



Rysunek 3. Pierwiastki szóstego stopnia liczby 64

Twierdzenie 8. *Liczba* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ *ma dokładnie* n *różnych pierwiastków* n*-tego stopnia. Określone są one wzorem:*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Szczegóły dowodu pominiemy, ograniczając się do zauważenia, że dla każdego w_k mamy na mocy wzoru Moivre'a:

$$\begin{aligned} w_k^n &= \left[\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right]^n = \\ &= |z|(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)) = z. \end{aligned}$$

Obliczymy $\sqrt[3]{i}$ (tu uwaga: ten symbol oznacza *trzy* liczby). Mamy:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},$$

zatem

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$w_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$w_2 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) = -i.$$

Pierwiastki stopnia szóstego liczby $64 = 64(\cos 0 + i\sin 0)$ to:

$$w_k = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, 5.$$

Są one wierzchołkami sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 2.

6. Równania algebraiczne

Równanie algebraiczne drugiego stopnia:

$$az^2 + bz + c = 0,$$

o współczynnikach zespolonych rozwiązujemy w zwykły sposób, tzn. obliczamy wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac$ i stosujemy wzory:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Zauważmy, że w tym przypadku (w przeciwieństwie do przypadku liczb rzeczywistych) zawsze istnieje $\sqrt{\Delta}$ — w istocie są dwa pierwiastki różniące się znakiem. Do powyższych wzorów wystarczy podstawiać dowolny z nich (ten drugi da te same wartości $z_{1,2}$).

Przykłady.

1. Rozwiązać równanie

$$z^2 - 4z + 5 = 0.$$

Obliczamy $\Delta = -4$, $\sqrt{\Delta} = \pm 2i$, $z_1 = \frac{4+2i}{2} = 2 + i$, $z_2 = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$.
To równanie miało współczynniki rzeczywiste i jego pierwiastki są liczbami sprzężonymi.

2. Rozwiązać równanie

$$z^2 + (-1 + i)z + (2 + i) = 0.$$

Obliczamy $\Delta = -8 - 6i$, $\sqrt{\Delta} = \pm(1 - 3i)$, więc

$$z_1 = \frac{1 - i + 1 - 3i}{2} = 1 - 2i, \qquad z_2 = \frac{1 - i - 1 - 3i}{2} = i.$$

W ogólnym przypadku pierwiastki nie są sprzężone.
Tak więc równanie algebraiczne drugiego stopnia ma dokładnie dwa pierwiastki (jeśli przyjmiemy, że pierwiastek podwójny — występujący, gdy $\Delta = 0$ — liczymy dwa razy).
Rozważmy teraz równanie postaci:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0,$$

gdzie $a_k \in \mathbb{C}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$ i $a_n \neq 0$. Takie równanie nazywamy *równaniem algebraicznym stopnia n.*

Twierdzenie 9. (zasadnicze twierdzenie algebry) *Równanie algebraiczne stopnia n o współczynnikach zespolonych ma w ciele liczb zespolonych dokładnie n pierwiastków (każdy pierwiastek liczymy tyle razy, ile wynosi jego krotność).*

Trudny dowód tego twierdzenia pominiemy. Zauważymy dla przykładu, że rozwiązaniami równania

$$z^n - 1 = 0$$

są pierwiastki stopnia n z liczby 1. Tradycyjnie używa się oznaczenia:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

Dla $k = 0$ otrzymujemy oczywisty pierwiastek 1. Jeśli n jest nieparzyste, to nie ma innych pierwiastków rzeczywistych. Gdy n jest parzyste, to drugi pierwiastek rzeczywisty -1 otrzymujemy dla $k = n/2$. Geometrycznie, pierwiastki leżą na okręgu o promieniu 1, w równych odstępach kątowych (kąt między dwoma kolejnymi pierwiastkami stopnia n wynosi $\frac{2\pi}{n}$). Łącząc je odcinkami otrzymamy n-kąt foremny wpisany w okrąg jednostkowy.
Do rozwiązywania równań wyższych rzędów można stosować znane metody. Np. rozwiązywanie równania:

$$z^3 - 4z^2 + 14z - 20 = 0$$

można rozpocząć od szukania pierwiastków całkowitych wśród dzielników 20. Znajdziemy 2 i stąd

$$z^3 - 4z^2 + 14z - 20 = (z-2)(z^2 - 2z + 10).$$

Wystarczy teraz rozwiązać równanie $z^2 - 2z + 10 = 0$.
W przypadku równania dwukwadratowego, np.

$$z^4 - 2z^2 + 4 = 0$$

podstawiamy $t = z^2$ i znajdujemy

$$t_1 = 1 + \sqrt{3}i, \quad t_2 = 1 - \sqrt{3}i.$$

Dla każdej ze znalezionych wartości należy teraz obliczyć pierwiastki kwadratowe. Otrzymamy

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+i),\ z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+i),\ z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}-i),\ z_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{3}+i).$$

Rozwiązywanie równań stopni wyższych wymaga na ogół pewnej pomysłowości. Jeśli się da, warto korzystać z postaci trygonometrycznej. Przykładowo rozważmy równanie:

$$(x+3i)^n + i(x-3i)^n = 0$$

gdzie $x \in \mathbb{R}$.
Zauważmy, że $3i$ na pewno nie jest pierwiastkiem. Zatem możemy równanie podzielić przez $(x-3i)^n$. Otrzymamy

$$\left(\frac{x+3i}{x-3i}\right)^n = -i.$$

Standardowo obliczamy pierwiastki stopnia n liczby $-i = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi$:

$$w_k = \cos\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots n-1.$$

Zatem

$$\frac{x+3i}{x-3i} = w_k,$$

skąd wyliczamy x:

$$x = -3i\frac{1+w_k}{1-w_k}.$$

Podstawimy teraz wartości w_k. Przy tym będziemy korzystać ze wzorów:

$$1 + \cos\varphi + i\sin\varphi = 2\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}),$$

$$1 - \cos\varphi - i\sin\varphi = 1 + \cos(\varphi+\pi) + i\sin(\varphi+\pi) = 2\cos\frac{\varphi+\pi}{2}(\cos\frac{\varphi+\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi+\pi}{2}).$$

Rachunek przebiega tak (dla uproszczenia zapisu piszemy na razie φ zamiast $\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{n}$):

$$x = -3i\frac{1+w_k}{1-w_k} = -3i\frac{2\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})}{2\cos\frac{\varphi+\pi}{2}(\cos\frac{\varphi+\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi+\pi}{2})}.$$

Uwzględniając, że $\cos\frac{\varphi+\pi}{2} = -\sin\frac{\varphi}{2}$ i wykonując dzielenie postaci trygonometrycznych otrzymamy

$$x = 3i\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})\right) = 3i\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot(-i) = 3\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Podstawiamy teraz $\varphi = \frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{n}$ czyli $\frac{\varphi}{2} = \frac{3+4k}{4n}\pi$. Otrzymujemy:

$$x = 3\operatorname{ctg}\frac{3+4k}{4n}\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots n-1.$$