Maciej Grzesiak
Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej

Postać wykładnicza liczby zespolonej

1. Symbol $e^{i\varphi}$.

Określamy:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

W ten sposób został zdefiniowany pewien symbol. Uzasadnieniem celowości jego wprowadzenia są następujące własności, pokazujące, że można go traktować jako potęgę liczby e.
Własności symbolu $e^{i\varphi}$.
1. $e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}$;
2. $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$;
3. $(e^{i\varphi})^k = e^{ik\varphi}$;
4. $e^{i(\varphi+2k\pi)} = e^{i\varphi}$;
5. $e^{i\varphi} \neq 0$;
6. $|e^{i\varphi}| = 1$;
7. $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$;

Przykłady. Obliczyć $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{2\pi i}$, e^{i}.

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{2}} &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,\\ e^{2\pi i} &= \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1,\\ e^{i} &= \cos 1 + i\sin 1. \end{aligned}$$

2. Wzory Eulera

Ponieważ

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\sin\varphi\\ e^{-i\varphi} &= \cos\varphi - i\sin\varphi \end{aligned}$$

więc po dodaniu (odjęciu) stronami i podzieleniu przez 2 (odpowiednio $2i$) otrzymujemy tożsamości, nazywane *wzorami Eulera*:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\\ \sin\varphi &= \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} \end{aligned}$$

Przykład. Wyrazić $\cos^2\varphi$ w zależności od $\cos 2\varphi$.

$$\cos^2\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2i\varphi}+2+e^{-2i\varphi}2\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{e^{2i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi).$$

3. Postać wykładnicza liczby

Definicja 1. Jeżeli φ jest argumentem liczby z, a r jej modułem, to $re^{i\varphi}$ nazywamy postacią wykładniczą liczby z.

Przykład. Rozwiązać równanie $z^2 = \bar{z}$.
Podstawiając $z = re^{i\varphi}$ otrzymujemy

$$r^3 e^{3i\varphi} = re^{-i\varphi},$$

skąd mamy $r = 0$ lub $r = 1$ i $3i\varphi = 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$. Różne kąty otrzymujemy dla $k = 0, 1, 2$. Są to $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, $\varphi = \frac{4}{3}\pi$. Zatem są 4 rozwiązania:

$$z = 0, \quad z = 1 \cdot e^0, \quad z = 1 \cdot e^{\frac{2}{3}\pi i}, \quad z = 1 \cdot e^{\frac{4}{3}\pi i},$$

czyli

$$z = 0, \quad z = 1, \quad z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Przykład. Rozwiązać równanie $z^3 = (2 + 2i)^6$.
Przykład. Rozwiązać równanie $\frac{z^3}{|z|^3} = 1$.
Niech $z = re^{i\alpha}$. Wtedy

$$\frac{(re^{i\alpha})^3}{|re^{i\alpha}|^3} = 1,$$

$$e^{3i\alpha} = 1$$

$$3i\alpha = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Zatem r jest dowolne, a α ma 3 wartości: 0, $2\pi/3$, $4\pi/3$. Geometrycznie są to 3 półproste wychodzące z początku układu, nachylone do osi rzeczywistej pod kątami 0, $2\pi/3$, $4\pi/3$.