opracował Maciej Grzesiak

Przestrzeń liniowa i przekształcenie liniowe

W algebrze rozpatruje się zbiory abstrakcyjne. Natura elementów zbioru się nie liczy. Na elementach rozpatruje się działania spełniające pewne aksjomaty. W ten sposób powstają teorie algebraiczne. Twierdzenie otrzymane w ramach teorii pozostaje słuszne we wszystkich konkretnych realizacjach, tzn. w każdej sytuacji, w której spełnione są aksjomaty. Przestrzeń liniowa to jedno z najbardziej udanych pojęć algebry. Obejmuje bardzo szeroką klasę rozmaitych realizacji.

1. Określenie i przykłady przestrzeni liniowej

Definicja 1. *Przestrzeń liniowa* (inaczej: *wektorowa*) V nad ciałem K jest to system algebraiczny $(V, K; +, \cdot)$ składający się ze
— zbioru V (wektorów),
— ciała K (skalarów),
— działania $+ : V \times V \to V$,
— działania $\cdot : K \times V \to V$,
w którym dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ i dowolnych $\xi, \eta \in K$:
1. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$,
2. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$,
3. istnieje $\mathbf{0} \in V$ (wektor zerowy) taki, że $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$,
4. $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$,
5. $\xi(\eta\mathbf{x}) = (\xi\eta)\mathbf{x}$,
6. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$,
7. $\xi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \xi\mathbf{x} + \xi\mathbf{y},\ (\xi + \eta)\mathbf{x} = \xi\mathbf{x} + \eta\mathbf{x}$.

Wektory oznaczamy literami łacińskimi:

$$\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots,$$

a skalary literami greckimi:

$$\xi, \eta, \ldots.$$

1. Zbiór wszystkich wektorów swobodnych na płaszczyźnie z dodawaniem wektorów i mnożeniem wektorów przez liczby rzeczywiste stanowi przykład przestrzeni wektorowej nad ciałem $\mathbb{R}$.
Podobnie jest ze zbiorem wektorów swobodnych w trójwymiarowej przestrzeni fizycznej.
2. Niech K będzie dowolnym ciałem. Określamy dla $n = 1, 2, \ldots$:

$$K^n = \{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\ :\ \xi \in K\}.$$

W zbiorze K^n wprowadzamy dodawanie wektorów "po współrzędnych" i mnożenie wektora przez liczbę jako mnożenie każdej współrzędnej wektora przez tę liczbę.
Struktura $(K^n, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową nad K.
3. Niech $\mathbb{R}^\infty$ oznacza zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach rzeczywistych. Ze znanymi działaniami dodawania ciągów i mnożenia ciągu przez liczbę:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n),$$
$$c(a_n) = (ca_n)$$

zbiór ten jest przestrzenią liniową.
4. Niech $C(0,1)$ oznacza zbiór wszystkich funkcji ciągłych określonych na przedziale $[0,1]$. Z działaniami dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez liczbę jest to przestrzeń liniowa.

Definicja 2. *Podprzestrzeń* W przestrzeni wektorowej V jest to podzbiór przestrzeni V, który sam jest przestrzenią wektorową ze względu na działania dodawania i mnożenia przez skalary w przestrzeni V.

Twierdzenie 1. *Niepusty podzbiór W jest podprzestrzenią przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy suma dowolnych dwóch wektorów zbioru W należy do W i iloczyn dowolnego wektora z W przez skalar należy do W.*

Zatem *aby stwierdzić czy dany podzbiór W jest podprzestrzenią należy sprawdzić czy działania są wykonalne w W*, tj. czy wynik należy do W.
Ważne: *Każda podprzestrzeń musi zawierać wektor zerowy.*
1. Zbiór jednoelementowy $\{\mathbf{0}\}$ jest podprzestrzenią każdej przestrzeni liniowej. Również cała przestrzeń V jest swoją podprzestrzenią.
2. Niech $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(0, \xi_2, \xi_3) \ : \ \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}\}$ (w zwykłej interpretacji i notacji geometrycznej jest to płaszczyzna $x = 0$).
Wykonując działania na wektorach płaszczyzny $x = 0$ nie wyjdziemy poza nią, więc W jest podprzestrzenią V.
Ale płaszczyzna $x = 1$, tj. zbiór $W = \{(1, \xi_2, \xi_3) \ : \ \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}\}$ nie jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^3$, bo np. $(1, 3, -1) + (1, 7, 9) = (2, 10, 8) \notin W$.
3. Niech W oznacza zbiór wszystkich wielomianów określonych na $[0,1]$. W jest podprzestrzenią $C(0,1)$, bo
1. suma wielomianów jest wielomianem;
2. iloczyn wielomianu przez liczbę jest wielomianem.

4. Jeśli przez c_0 oznaczymy zbiór wszystkich ciągów rzeczywistych zbieżnych do 0, to c_0 jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^\infty$.
5. Zbiór rozwiązań $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ układu równań jednorodnych:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\
\multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0
\end{array}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^n$.
Istotnie, jeśli rozwiązaniami układu są $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, to także liczby $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n$ stanowią rozwiązanie tego układu; również $(cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)$ jest rozwiązaniem (dla dowolnej stałej c).
1. Sprawdzić, czy jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^3$ podzbiór:

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \ : \ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$$

Rozwiązanie. Jeżeli $\mathbf{v}_1 = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{v}_2 = (x_1', x_2', x_3')$ należą do A, to $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$ oraz $2x_1' + 3x_2' - x_3' = 0$.
Suma tych wektorów wynosi

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3')$$

Dla tego wektora należy sprawdzić warunek przynależności do A:

$$\begin{aligned}
2(x_1 + x_1') \quad &+ \quad 3(x_2 + x_2') - (x_3 + x_3') = \\
&= \quad (2x_1 + 3x_2 - x_3) + (2x_1' + 3x_2' - x_3') = 0 + 0 = 0,
\end{aligned}$$

więc $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in A$.
Jeżeli c jest dowolną stałą, to $c\mathbf{v}_1 = (cx_1, cx_2, cx_3)$ oraz

$$2(cx_1) + 3(cx_2) - (cx_3) = c(2x_1 + 3x_2 - x_3) = c \cdot 0 = 0,$$

więc także $c\mathbf{v}_1 \in A$. Zatem A jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

1. Sprawdzić, czy jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^3$ podzbiór:

$$B = \{(x_1, x_2, x_3) \ : \ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1\}$$

Rozwiązanie. Wystarczy zauważyć, że wektor $(0, 0, 0) \notin B$. Zatem B nie jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

2. Liniowa niezależność wektorów. Baza i wymiar.

Kombinacja liniowa wektorów Niech $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ będzie zbiorem wektorów. Wektor

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_m \mathbf{v}_m \qquad (\lambda_i \in K)$$

nazywamy *kombinacją liniową wektorów.*

Twierdzenie 2. *Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów z pewnego podzbioru przestrzeni V jest podprzestrzenią przestrzeni V.*

Ta podprzestrzeń jest najmniejszą podprzestrzenią zawierającą wszystkie wektory podzbioru; nazywamy ją *podprzestrzenią generowaną* przez wektory lub *rozpiętą* na nich.
Z jednego wektora można tworzyć tylko kombinacje postaci $\lambda \mathbf{v}$.
Tworzą one podprzestrzeń

$$W = \{\lambda \mathbf{v} \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Geometrycznie jest to prosta zawierająca wektor $\mathbf{v}$.
Dwa wektory niewspółliniowe $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozpinają płaszczyznę.
Np. $\mathbf{v} = (1, 3, 2)$, $\mathbf{w} = (2, 2, -4)$. Kombinacja tych wektorów ma postać:

$$\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w} = (\alpha + 2\beta, 3\alpha + 2\beta, 2\alpha - 4\beta)$$

Zatem kolejne współrzędne tego wektora to:

$$x = \alpha + 2\beta, \ y = 3\alpha + 2\beta, \ z = 2\alpha - 4\beta$$

Rugując z tych równań α, β otrzymujemy równanie płaszczyzny:

$$4x - 2y + z = 0.$$

Zauważmy, że trzy wektory $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozpinają tę samą płaszczyznę, bo kombinację $\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w} + \gamma(\mathbf{v} + \mathbf{w})$ można zapisać jako $(\alpha + \gamma)\mathbf{v} + (\beta + \gamma)\mathbf{w}$.

Definicja 3. *Wymiar przestrzeni V* (oznaczenie $\dim V$) określamy jako najmniejszą liczbę wektorów, na których rozpięta jest ta przestrzeń. Jeśli żaden skończony zbiór wektorów nie generuje V, to $\dim V = \infty$.

Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ ma wymiar n, bo jest rozpięta na wektorach

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Wynika to z równości

$$\mathbf{v} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{e}_n.$$

Zadanie. Znaleźć wymiar przestrzeni liniowej generowanej przez wektory $(-1, 3, 2)$, $(1, 3, 1)$, $(0, 6, 3)$.
Rozwiązanie. Przestrzeń składa się z wektorów postaci

$$\alpha(-1, 3, 2) + \beta(1, 3, 1) + \gamma(0, 6, 3)$$

Ale $(0, 6, 3) = (-1, 3, 2) + (1, 3, 1)$, więc

$$\alpha(-1, 3, 2) + \beta(1, 3, 1) + \gamma(0, 6, 3) = (\alpha + \gamma)(-1, 3, 2) + (\beta + \gamma)(1, 3, 1)$$

Zatem wystarczą dwa wektory aby generować tę przestrzeń. Wymiar wynosi 2.

Definicja 4. Wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ nazywamy *liniowo niezależnymi*, jeśli jedyną kombinacją liniową wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ równą zero jest kombinacja, w której wszystkie współczynniki są równe zeru, czyli:

$$(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}) \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0).$$

W przeciwnym wypadku wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ nazywamy *liniowo zależnymi.*

Twierdzenie 3. *Zbiór $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje k takie, że wektor $\mathbf{v}_k$ jest kombinacją liniową pozostałych wektorów tego zbioru.*

1. W przestrzeni K^n wektory jednostkowe $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ są liniowo niezależne.
2. W $\mathbb{R}^2$ wektory $(3, 2)$ i $(-2, 5)$ są niezależne.
D o w ó d. Załóżmy, że

$$\lambda_1(3, 2) + \lambda_2(-2, 5) = (0, 0).$$

Wtedy

$$(3\lambda_1 - 2\lambda_2, 2\lambda_1 + 5\lambda_2) = (0, 0),$$

więc mamy układ jednorodny

$$3\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0,\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$$

o wyznaczniku niezerowym.
Zatem **jedynym** rozwiązaniem jest $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$.
Praktycznie:
— w $\mathbb{R}^2$ wektory są zależne, gdy są współliniowe,
— w $\mathbb{R}^3$ wektory (w liczbie większej niż 2) są zależne, gdy leżą w jednej płaszczyźnie.
Uwaga. Jeżeli mamy n wektorów w $\mathbb{R}^n$, to założenie, że ich kombinacja jest wektorem zerowym prowadzi do układu jednorodnego. Rozwiązania niezerowe istnieją tylko wtedy, gdy wyznacznik układu jest równy 0. Mozna łatwo zobaczyć, że k-ta kolumna tego wyznacznika składa się ze współrzędnych k-tego wektora. Zatem:
wektory są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy utworzony z nich wyznacznik jest niezerowy.
Gdy liczba wektorów jest inna niż wymiar przestrzeni, to nie można utworzyć wyznacznika, i nie ma tak prostego kryterium niezależności wektorów.

Definicja 5. Zbiór wektorów $\{v_t\}_{t \in T}$ nazywamy *bazą przestrzeni* V, gdy:
1. dowolny skończony podzbiór $\{v_{t_1}, v_{t_2}, \ldots, v_{t_n}\}$ jest liniowo niezależny,
2. dla dowolnego wektora $w \in V$ istnieją wektory $v_{t_1}, v_{t_2}, \ldots, v_{t_k}$ i elementy ciała $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ takie, że $w = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i v_{t_i}$,

czyli krótko: zbiór tworzy bazę, jeśli generuje przestrzeń i każdy jego skończony podzbiór jest liniowo niezależny.
1. Bazę w $\mathbb{R}^2$ tworzą wektory $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ i $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.
Inną bazą jest np. zbiór $\{(1, 1), (1, 2)\}$ lub $\{(-1, 5), (3, -2)\}$.
2. Bazę *standardową* w $\mathbb{R}^n$ tworzą wektory:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

3. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zbiór $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ nie tworzy bazy — jest za mały. Także zbiór
$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)$ nie tworzy bazy — jest za duży.
4. W przestrzeni W_n wielomianów stopnia nie większego od n bazę tworzą jednomiany

$$1, x, x^2, \ldots, x^n.$$

Istotnie, każdy wielomian jest kombinacją tych jednomianów i oczywiście są one liniowo niezależne.

5. W przestrzeni W wszystkich wielomianów bazę tworzy nieskończony zbiór jednomianów
$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

Twierdzenie 4. *Jeżeli wektory $v_1, v_2, \dots, v_n$ tworzą bazę przestrzeni V, to każdy wektor $w \in V$ da się przedstawić* jednoznacznie *w postaci kombinacji liniowej wektorów v_i:*
$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i. \tag{1}$$

D o w ó d. Na podstawie definicji bazy każdy wektor $\mathbf{w} \in V$ da się przedstawić w postaci (1). Gdyby istniało inne takie przedstawienie:
$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* \mathbf{v}_i$$
to
$$\mathbf{0} = \mathbf{w} - \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_i^*) \mathbf{v}_i.$$
Z tej równości wynika jednak, że $\lambda_i - \lambda_i^* = 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ (bo wektory $\mathbf{v}_i$ są liniowo niezależne). ■
Skalary λ_i występujące w równości (1) nazywamy *współrzędnymi* wektora $\mathbf{w}$ w bazie $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v}_n$.
Współrzędne określają wektor, co zapisujemy następująco:
$$\mathbf{w} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$
Ten sam wektor ma różne przedstawienia w różnych bazach.
Bazą domyślną w $\mathbb{R}^n$ jest baza standardowa. Np.
$$(-16, 13, -3) = -16\mathbf{e_1} + 13\mathbf{e_2} - 3\mathbf{e_3}$$
Jeżeli
$$B = \{(-1, 2, 0), (2, 1, 1), (-2, 3, 0)\},$$
to ponieważ
$$(-16, 13, -3) = 2(-1, 2, 0) - 3(2, 1, 1) + 4(-2, 3, 0)$$
więc
$$(-16, 13, -3) = (2, -3, 4)_B$$
w bazie B.
Zadanie. Uzasadnić, że wektory
$$\{(1, 2, -1), (2, 0, -2), (1, 1, -3)\}$$
tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Znaleźć współrzędne wektora $\mathbf{v} = (4, 0, 4)$ w tej bazie.
Rozwiązanie. Obliczamy wyznacznik macierzy utworzonej z danych wektorów (zapisanych jako kolumny):
$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 8.$$
Skoro wyznacznik jest różny od 0, to wektory są niezależne, a ponieważ ich liczba równa jest wymiarowi przestrzeni, to tworzą bazę.
Współrzędne wektora $\mathbf{v}$ znajdujemy z równania wektorowego:
$$x(1, 2, -1) + y(2, 0, -2) + z(1, 1, -3) = (4, 0, 4),$$

któremu odpowiada układ równań:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ 2x & & & + & z & = & 0 \\ -x & - & 2y & - & 3z & = & 4 \end{array}\right.$$

Układ ten można rozwiązać stosując wzory Cramera (wyznacznik główny już mamy, a kolejne liczy się łatwo). Otrzymamy $x = 2, y = 3, z = -4$, czyli $\mathbf{v} = (2, 3 - 4)$ w tej bazie.

3. Przekształcenie liniowe i jego macierz.

Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem K.

Definicja 6. *Przekształceniem liniowym* $f : V \to W$ nazywamy przekształcenie spełniające warunek:

$$f(\lambda\mathbf{v} + \eta\mathbf{w}) = \lambda f(\mathbf{v}) + \eta f(\mathbf{w}) \qquad \text{dla } \lambda, \eta \in K,\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V. \tag{2}$$

Równoważnie:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\mathbf{v}_i) \qquad \text{dla } \lambda_i \in K,\ \mathbf{v}_i \in V. \tag{3}$$

Warunek (2) jest równoważny układowi warunków:

$$f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) \qquad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \tag{4}$$

$$f(\lambda\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v}) \qquad \lambda \in K,\ \mathbf{v} \in V. \tag{5}$$

Pierwszy z nich nazywa się warunkiem *addytywności*, a drugi — *jednorodności*. Przekształcenia liniowe nazywa się też *operatorami.*
Przykłady.
1. W tym przykładzie zarówno V, jak i W będzie płaszczyzną, traktowaną jako zbiór wektorów zaczepionych w początku układu współrzędnych. Niech f oznacza obrót płaszczyzny dokoła ustalonego punktu o ustalony kąt.
Wiadomo, że wtedy sumie wektorów odpowiada suma ich obrazów (czyli przekształcenie jest addytywne) oraz że jeśli wektor pomnożymy przez liczbę, to jego obraz także należy pomnożyć przez tę liczbę (zatem f jest jednorodne).
2. Rozważmy obrót przestrzeni dokoła pewnej osi o ustalony kąt. Tak jak poprzednie przekształcenie, to także jest liniowe.
3. Niech V będzie przestrzenią wielomianów stopnia co najwyżej n, a W — przestrzenią wielomianów stopnia co najwyżej $n-1$. Rozważymy *operator różniczkowania* $D : V \to W$ przyporządkowujący wielomianowi jego pochodną.
Ponieważ dla dowolnych wielomianów $p(x)$ i $q(x)$ mamy:

$$D(p(x) + q(x)) = (p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x) = D(p(x)) + D(q(x))$$

oraz

$$D(cp(x) = (cp(x))' = cp'(x) = cD(p(x)),$$

więc operator różniczkowania jest liniowy.
4. Niech $V = W = C(0, 1)$. Operator

$$f(x) \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$$

jest liniowy, bo

$$\int_0^x (f(t) + g(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x g(t)\,dt\ , \ \int_0^x cf(t)\,dt = c\int_0^x f(t)\,dt.$$

5. Analogicznie, operator całkowania $f(x) \mapsto \int_0^1 f(t)\,dt$ odwzorowujący $C(0,1)$ w $\mathbb{R}$ jest liniowy.
6. Jeżeli V jest przestrzenią ciągów zbieżnych, $W = \mathbb{R}$ i dla dowolnego (a_n) określimy

$$L((a_n)) = \lim_{n\to\infty} a_n$$

to otrzymamy przekształcenie liniowe $L : V \to \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} L((a_n)+(b_n)) &= \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \\ &= L((a_n)) + L((b_n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(c(a_n)) &= \lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n \\ &= cL((a_n)) \end{aligned}$$

7. Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą typu $m \times n$, $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$. Przekształcenie $f : V \to W$ określone wzorem

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X},$$

gdzie $\mathbf{X}$ oznacza wektor przestrzeni V traktowany jako macierz jednokolumnowa, jest liniowe.
Wynika to z własności iloczynu macierzy:

$$f(c\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot c\mathbf{X} = c\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = cf(\mathbf{X}),$$

$$f(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) = \mathbf{A} \cdot \big(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2\big) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_1 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_2 = f(\mathbf{X}_1) + f(\mathbf{X}_2).$$

8. Wśród przekształceń $V \to V$ na pewno dwa są liniowe: *przekształcenie tożsamościowe* id, określone wzorem $\mathrm{id}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, oraz przekształcenie zerowe 0, $0(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
Jeśli $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}$ jest ustalonym wektorem, to *przekształcenie stałe* f, $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_0$ *nie jest* liniowe, bo nie jest addytywne. Mianowicie $f(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{v}_0$, ale $(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) = 2\mathbf{v}_0$.
W dalszym ciągu będziemy zakładać, że przestrzenie V i W są skończenie wymiarowe.
Z przykładu 7 wynika, że każda macierz określa przekształcenie liniowe. Jest także na odwrót — każde przekształcenie liniowe wyznacza pewną macierz.

Twierdzenie 5. *Jeżeli $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ stanowią jakąkolwiek bazę przestrzeni liniowej V i $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ są dowolnymi wektorami przestrzeni W, to istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $f : V \to W$ takie, że $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ dla $i = 1, \ldots, n$. Przekształcenie to jest określone wzorem:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{w}_i. \tag{6}$$

D o w ó d. Wzór (6) określa wartość przekształcenia f dla dowolnego wektora $\mathbf{v} \in V$, bo wektor $\mathbf{v}$ ma jednoznaczne przedstawienie w bazie $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.
Dla wektorów $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i$ i $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \mathbf{v}_i$ mamy:

$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u}) &= f\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \eta_i \mathbf{v}_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha\lambda_i + \beta\eta_i)\mathbf{v}_i\right) = \\ &= \sum (\alpha\lambda_i + \beta\eta_i)\mathbf{w}_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{w}_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \eta_i \mathbf{w}_i = \\ &= \alpha f(\mathbf{v}) + \beta f(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

■

Jeżeli w W mamy bazę $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$, to każdy z wektorów $\mathbf{w}_j$, $j = 1, \ldots, n$ można wyrazić za pomocą współrzędnych, tj.

$$f(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mathbf{u}_i = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}).$$

Z liczb a_{ij} można utworzyć macierz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ typu $m \times n$, którą nazwiemy macierzą przekształcenia liniowego f w bazach $\{\mathbf{v}_j\}$ i $\{\mathbf{u}_i\}$.
j-tą kolumnę tej macierzy stanowią współrzędne wektora $f(\mathbf{v}_j)$.

Twierdzenie 6. *Istnieje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie pomiędzy przekształceniami liniowymi $f : V \to W$ a macierzami $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ typu $m \times n$ o wyrazach z ciała K.*
Jeżeli dane jest f, to odpowiadająca mu macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą, której j-ta kolumna składa się ze współrzędnych wektora $f(\mathbf{v}_j)$.
Jeśli dana jest macierz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, to f jest jedynym przekształceniem liniowym przeprowadzającym każdy wektor bazy $\{\mathbf{v}_j\}$ przestrzeni V na j-tą kolumnę $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ macierzy $\mathbf{A}$.

Przykłady.
1. Niech $V = W = \mathbb{R}^2$, niech $f : V \to W$ będzie obrotem płaszczyzny dokoła początku układu o ustalony kąt φ. Jeżeli w obu przestrzeniach rozpatrujemy bazy kanoniczne, to

$$f(\mathbf{e}_1) = (\cos\varphi, \sin\varphi), \quad f(\mathbf{e}_2) = (-\sin\varphi, \cos\varphi).$$

Zatem macierz obrotu ma postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Tej macierzy można używać do obliczania wartości przekształcenia. Jeśli $\mathbf{v} = (x, y)$, $f(\mathbf{v}) = (x', y')$, to ponieważ $f(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}^T$, więc

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},$$

czyli

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \tag{8}$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \tag{9}$$

2. Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem określonym wzorem

$$f(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Geometrycznie można to przekształcenie interpretować jako rzutowanie przestrzeni na płaszczyznę Oxy.
W bazach standardowych jego macierzą jest

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zmiana baz, np. na bazę $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)$ (w obu przestrzeniach) skutkuje zmianą macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Baza przestrzeni V nie musi być identyczna z bazą przestrzeni W.
Zadanie. Sprawdzić, że $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (3x - y, 4x + y, 5y)$ jest liniowe i napisać jego macierz w bazach standardowych.
Niech $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$. Wtedy

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

więc

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \\ &= (3(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), 4(x_1 + x_2) + y_1 + y_2, 5(y_1 + y_2)) = \\ &= (3x_1 - y_1, 4x_1 + y_1, 5y_1) + (3x_2 - y_2, 4x_2 + y_2, 5y_2) = \\ &= f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(\alpha\mathbf{v}) &= f(\alpha x, \alpha y) = (3\alpha x - \alpha y, 4\alpha x + \alpha y, \alpha y) = \\
&= \alpha(3x - y, 4x + y, 5y) = \alpha f(\mathbf{v}).
\end{aligned}
$$

Ponieważ $f(1,0) = (3,4,0)$ i $f(0,1) = (-1,1,5)$, więc macierzą przekształcenia jest:

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.
$$

Warto porównać ze wzorem przekształcenia:

$$
f(x,y) = (3x - y, 4x + y, 5y)
$$

Napisanie macierzy takiego przekształcenia jak to powinno być automatyczne. Jeśli $h : V \to W$ i $g : W \to U$ są przekształceniami oraz jeśli przeciwdziedzina h zawiera się w dziedzinie g, to określone jest *złożenie* $g \circ h : V \to U$:

$$
(g \circ h)(\mathbf{v}) = g(h(\mathbf{v})) \qquad \text{dla } \mathbf{v} \in V.
$$

Przykład.

$$
\begin{aligned}
h :& \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad h(u,v) = (2u + 3v, u - v, u) \\
g :& \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ , \quad g(x,y,z) = 2x + 3y - 5z) \\
g \circ h :& \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ , \quad (g \circ h)(u,v) = 2u + 3v.
\end{aligned}
$$

Lemat 1. *Złożenie przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym.*

D o w ó d. Niech $f = g \circ h$. Wtedy dla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\eta, \lambda \in K$:

$$
\begin{aligned}
f(\eta\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) &= g(h(\eta\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y})) = g(\eta h(\mathbf{x}) + \lambda h(\mathbf{y})) = \\
&= \eta g(h(\mathbf{x})) + \lambda g(h(\mathbf{y})) = \eta f(\mathbf{x}) + \lambda f(\mathbf{y}). \blacksquare
\end{aligned}
$$

Niech $f = g \circ h$ i niech bazami w przestrzeniach V, W, U będą odpowiednio zbiory $\{\mathbf{v}_k\}_{k=1}^n$, $\{\mathbf{w}_j\}_{j=1}^p$, $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^m$.
Oznaczmy macierze przekształceń h i g przez $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, wtedy

$$
h(\mathbf{v}_k) = \sum_{j=1}^{p} a_{jk}\mathbf{w}_j, \qquad g(\mathbf{w}_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\mathbf{u}_i,
$$

więc

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{v}_k) &= g(h(\mathbf{v}_k)) = g\left(\sum_{j=1}^{p} a_{jk}\mathbf{w}_j\right) = \sum_{j=1}^{p} a_{jk} \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\mathbf{u}_i = \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{jk} b_{ij}\right) \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{m} c_{ik}\mathbf{u}_i,
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} b_{ij} a_{jk}.
$$

(wzór na iloczyn macierzy!)
Zatem macierzą złożenia $f = g \circ h$ jest $\mathbf{C} = [c_{ik}] = \mathbf{BA}$.

Wniosek 1. *Złożeniu przekształceń odpowiada iloczyn macierzy.*

Przykład.
Obliczyć $\mathbf{A}^{100}$, gdy

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.
$$

Z równości (7) widać, że macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą obrotu płaszczyzny o kąt $\varphi = \pi/4$. Zatem macierzy $\mathbf{A}^{100}$ odpowiada stukrotne złożenie tego obrotu, czyli obrót o kąt $100\varphi = 25\pi$. Ponieważ $\cos(25\pi) = -1$, $\sin(25\pi) = 0$, więc znowu na mocy (7):

$$\mathbf{A}^{100} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}^{100} = \begin{bmatrix} \cos 25\pi & -\sin 25\pi \\ \sin 25\pi & \cos 25\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Przekształcenie odwrotne i macierz odwrotna.

Definicja 7. Niech $f : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Jeżeli istnieje przekształcenie $g : V \to V$ takie, że

$$f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_V,$$

to g nazywamy przekształceniem odwrotnym względem f i piszemy $g = f^{-1}$.

Np. przekształceniem odwrotnym do obrotu płaszczyzny o kąt φ jest obrót o kąt $-\varphi$.
Złożeniu przekształceń odpowiada iloczyn ich macierzy, więc jeśli $\mathbf{A}$ jest macierzą przekształcenia f, a $\mathbf{A}^{-1}$ macierzą przekształcenia f^{-1}, to

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \tag{10}$$

Macierz $\mathbf{A}^{-1}$ mającą własność (10) nazywamy macierzą odwrotną względem $\mathbf{A}$.

Definicja 8. Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą kwadratową. Macierz $\mathbf{B}$ spełniającą warunki

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$$

nazywamy *macierzą odwrotną* macierzy $\mathbf{A}$ i oznaczamy $\mathbf{A}^{-1}$.

Przykład. Dla macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ mamy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$.
Zatem $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$.
Warunek istnienia macierzy odwrotnej wynika z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 7. (Cauchy'ego) *Dla dowolnych macierzy kwadratowych* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *tego samego stopnia*

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}.$$

Po zastosowaniu twierdzenia Cauchy'ego do równości (10) otrzymujemy:

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{-1} = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{I} = 1.$$

Wnioskujemy stąd, że $\det \mathbf{A} \neq 0$ czyli macierz mająca macierz odwrotną musi być nieosobliwa. Ponadto wyznacznik macierzy odwrotnej jest równy odwrotności wyznacznika macierzy danej.
Macierz odwrotna iloczynu dwóch macierzy nieosobliwych jest równa iloczynowi macierzy odwrotnych tych macierzy wziętych w odwrotnej kolejności:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

D o w ó d.

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) &= \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{I}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Macierz odwrotną możemy obliczyć dwoma sposobami.
Sposób 1. Zastosować wzór:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & & \dots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Macierz występującą w tym wzorze nazywamy *macierzą dołączoną* i oznaczamy $\mathbf{A}^D$. Jest to transpozycja macierzy $[A_{ij}]$ zbudowanej z dopełnień algebraicznych. Wzór można sprawdzić, obliczając $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$, bo element c_{ij} tego iloczynu jest postaci:

$$c_{ij} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk},$$

a jak wiadomo:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{dla} & i \neq j \\ \det \mathbf{A} & \text{dla} & i = j \end{array} \right. .$$

Przykład.
Znaleźć macierz odwrotną do macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy $\det \mathbf{A} = -7$ i następnie

$$[M_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [A_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^D = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sposób 2.

Twierdzenie 8. *Jeżeli macierz* $\mathbf{I}$ *otrzymujemy przez operacje elementarne na wierszach z macierzy* $\mathbf{A}$, *to macierz* $\mathbf{A}^{-1}$ *powstaje z macierzy* $\mathbf{I}$ *w wyniku wykonania tych samych operacji elementarnych.*

Przykład.
Znajdziemy odwrotność macierzy z poprzedniego przykładu.
Zapisujemy macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{I}$ obok siebie; kolejne etapy przekształcenia łączymy znakiem równoważności $\sim$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right].$$

Zadanie. Dane są macierze:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jakim przekształceniom odpowiadają te macierze? Znaleźć $h = f_A \circ f_B$. Wyznaczyć h^{-1}.
Rozwiązanie. Macierzy $\mathbf{A}$ odpowiada przekształcenie

$$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f_A(x, y, z) = (x + y - 2z, 3x - y + 2z),$$

a macierzy $\mathbf{B}$ odpowiada przekształcenie

$$f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f_B(x, y) = (2x - y, x + 2y, 2y).$$

Złożenie możemy obliczyć bezpośrednio, ale lepiej obliczyć iloczyn macierzy:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix},$$

i stąd

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad h(x, y) = (3x - 3y, 5x - y).$$

Również h^{-1} najlepiej wyznaczyć posługując się macierzą odwrotną (którą można obliczyć dowolną metodą).

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{12} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

Zatem

$$h^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad h^{-1}(x,y) = (-\frac{1}{12}x + \frac{1}{4}y, -\frac{5}{12}x + \frac{1}{4}y).$$