Maciej Grzesiak
Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej

Całki krzywoliniowe

28.04.2018

1. Definicja całki krzywoliniowej nieskierowanej

Rozważmy następujący problem. Dany jest przewód elektryczny na którym rozmieszczone są ładunki. Przypuśćmy, że znana jest gęstość liniowa ładunku[1]. Jak obliczyć całkowity ładunek zgromadzony na krzywej?
Podobny problem może dotyczyć masy. Mamy krzywą (drut, linę,...) o zmiennej gęstości liniowej[2] i chcemy obliczyć masę całkowitą.
Aby problem "zmatematyzować" należy pewne pojęcia sprecyzować.

Definicja 1. Krzywą *na płaszczyźnie nazywamy zbiór*

$$K = \{(x(t), y(t)) : \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$$

gdzie odwzorowania $x(t), y(t)$ *są ciągłe na przedziale* $[\alpha, \beta]$ *i ten przedział można podzielić na skończoną liczbę podprzedziałów, na których odwzorowania* $x(t), y(t)$ *są różnowartościowe. Jeżeli* $x(t), y(t)$ *są różnowartościowe na całym przedziale* $[\alpha, \beta]$, *to krzywą nazywamy* łukiem. *Równania*

$$x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

nazywamy opisem parametrycznym (parametryzacją) *krzywej* K.

Przykład. Elipsa jest określona równaniami:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Nie jest to łuk, bo funkcje $x(t), y(t)$ nie są różnowartościowe. Gdy ograniczymy się np. do $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, to otrzymamy łuk.
Analogicznie określamy krzywą w przestrzeni:

$$K = \{(x(t), y(t), z(t)) : \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}.$$

Np. równania:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ z = bt, \quad t \in \mathbb{R},$$

przedstawiają *linię śrubową*.
Krzywe mogą mieć wiele różnych parametryzacji.
Np. $x = t,\ y = 2t - 1$ oraz $x = \ln t,\ y = 2\ln t - 1$ są parametryzacjami tej samej prostej.
W szczególności gdy krzywa płaska ma parametryzację

$$x = t,\ y = y(t),\ a \leqslant t \leqslant b,$$

to piszemy krótko $y = y(x)$ i mówimy, że krzywa określona jest równaniem jawnym. Nie jest to możliwe dla krzywej przestrzennej.

[1] Gęstość liniowa ładunku na kawałku przewodu jest to iloraz całego ładunku na tym kawałku do jego długości. Gęstość liniowa ładunku w punkcie jest to granica tych ilorazów gdy długość kawałka dąży do 0.
[2] Gęstość liniowa masy łuku krzywej jest to iloraz całej masy na tym łuku do jego długości. Gęstość liniowa w punkcie jest to granica tych ilorazów gdy długość łuku dąży do 0.

Parametryzację nazywamy *regularną*, gdy funkcje $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ mają ciągłe pochodne i spełniają warunek $x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 > 0$ dla $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Łuk mający parametryzację regularną nazywamy *łukiem regularnym*.
Wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech K będzie krzywą płaską niezamkniętą o końcach A, B a $\rho(M)$ niech będzie gęstością (ładunku czy masy) w punkcie $M \in K$. Jeżeli gęstość zmienia się w sposób ciągły, to na krótkim łuku jest w przybliżeniu stała. Dzielimy krzywą K na łuki punktami

$$A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$$

i na i-tym łuku $A_{i-1}A_i$ obieramy punkt M_i, w którym gęstość wynosi $\rho(M_i)$. Jeśli m_i oznacza masę tego łuku, to

$$m_i \approx \rho(M_i)\sigma_i,$$

gdzie σ_i jest długością łuku $A_{i-1}A_i$. Masa całej krzywej:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\sigma_i.$$

Błąd przybliżenia dąży do 0 jeśli długości wszystkich łuków dążą do 0. Zatem

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\sigma_i,$$

gdzie λ jest długością największego z łuków.
Ogólniej, jeśli mamy funkcję $f(M) = f(x, y)$ określoną na punktach krzywej płaskiej K, to powtarzając powyższe postępowanie uzyskujemy sumę:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\sigma_i,$$

gdzie (ξ_i, η_i) jest punktem łuku $A_{i-1}A_i$.
Suma ta jest sumą całkową (podobne sumy pojawiają się w definicji całki oznaczonej lub podwójnej). Jeżeli ma ona granicę gdy $\lambda = \max \sigma_i \to 0$, przy czym granica nie zależy od sposobu podziału krzywej i wyboru punktów M_i, to granicę tę nazywamy *całką krzywoliniową nieskierowaną* funkcji $f(x, y)$ po krzywej K i oznaczamy

$$\int_K f(x, y)ds.$$

Symbol ds nazywamy *różniczką łuku*. Analogicznie wprowadzamy pojęcie całki po krzywej przestrzennej K:

$$\int_K f(x, y, z)ds.$$

Twierdzenie 1. *Jeżeli krzywa K ma parametryzację regularną*

$$x = x(t), y = y(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

to

$$\int_K f(x, y)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

Ponieważ równanie jawne krzywej $y = y(x)$ można traktować jako szczególny przypadek równań parametrycznych (gdy $x = t$), więc mamy

Wniosek 1. *Jeżeli krzywa K dana jest równaniem jawnym*

$$y = y(x), \ a \leqslant t \leqslant b$$

to

$$\int\limits_K f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'(x)^2}dx.$$

Dla krzywej przestrzennej całkę obliczamy ze wzoru

$$\int\limits_K f(x,y,z)ds = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt.$$

Przykłady. Obliczyć całki
1. $\int\limits_K yds$, gdzie K jest łukiem paraboli $y^2 = 4x$ od $O(0,0)$ do $A(1,2)$. (odp.: $\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)$.)
2. $\int\limits_K x^2yds$, gdzie K jest łukiem okręgu $x^2+y^2 = R^2$ leżącym w I ćwiartce. (odp.: $\frac{1}{3}R^4$.)
3. $\int\limits_K (x^2+y^2)ds$, gdzie K: $x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. (odp.: $2a^3\pi^2(1+2\pi^2)$.)
4. Znaleźć masę części krzywej materialnej $y = \ln x$ dla $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$ jeżeli gęstość liniowa równa się kwadratowi odciętej. (odp.: $\frac{19}{3}$.)

2. Całki krzywoliniowe skierowane

Całka krzywoliniowa nieskierowana jest wygodnym narzędziem do obliczania masy skupionej na krzywej. Natomiast całka krzywoliniowa skierowana, którą teraz określimy, ma związek z obliczaniem pracy wykonywanej przez pewną (zmienną) siłę. Wiadomo, że w najprostszym przypadku siły stałej mamy:

$$\text{praca} = \text{siła} \times \text{przesunięcie}$$

Jeżeli siła o zmiennej wartości $F(x)$ działa na przedziale $[a,b]$, to praca przez nią wykonywana wyraża się wzorem

$$W = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Do tej pory nie miało znaczenia, że siła jest wektorem. Jednak gdy przemieszczenie jest wzdłuż krzywej, to siła zmienia nie tylko wielkość, ale i kierunek.
Chcąc obliczyć pracę jaką wykonuje siła $\overrightarrow{F} = [F_1, F_2, F_3]$ przesuwając obiekt o $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ powinniśmy zsumować wielkości F_1v_1, F_2v_2, F_3v_3. Zatem praca wynosi

$$F_1v_1 + F_2v_2 + F_3v_3 = \overrightarrow{F} \circ \vec{v}.$$

Zatem również w tym przypadku:

$$\text{praca} = \text{siła} \circ \text{przesunięcie},$$

z tym, że mnożenie oznacza w tym przypadku iloczyn skalarny.
Zdefiniujemy teraz łuk skierowany.

Definicja 2. *Łuk K (na płaszczyźnie lub w przestrzeni) nazywamy łukiem skierowanym, gdy wyróżniony w nim został początek i koniec. Jeżeli A jest początkiem, a B końcem łuku, to piszemy $K = AB$. Łuk o początku B i końcu A nazywamy wtedy łukiem przeciwnie skierowanym i oznaczamy $-K$.*

Określimy teraz całkę krzywoliniową skierowaną w przestrzeni.

Definicja 3. *Niech K będzie regularnym łukiem skierowanym w przestrzeni, o parametryzacji*

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

i niech dane będą trzy funkcje trzech zmiennych

$$P(x, y, z), \ Q(x, y, z), \ R(x, y, z),$$

określone i ciągłe we wszystkich punktach łuku K. Całkę skierowaną *z funkcji $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ po łuku K oznaczamy symbolem $\int\limits_K Pdx + Qdy + Rdz$ i definiujemy równością:*

$$\begin{aligned} \int\limits_K Pdx + Qdy + Rdz &= \int\limits_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \\ &+ Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt \end{aligned} \tag{1}$$

Dla krzywej na płaszczyźnie określenie całki skierowanej jest podobne:

$$\int\limits_K Pdx + Qdy = \int\limits_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt$$

Uwagi:

1. Całkę krzywoliniową skierowaną w przestrzeni można traktować jako sumę trzech składników

$$\int\limits_K Pdx + \int\limits_K Qdy + \int\limits_K Rdz.$$

2. Zmiana skierowania krzywej zmienia znak całki, tzn.

$$\int\limits_{-K} Pdx + Qdy + Rdz = -\int\limits_K Pdx + Qdy + Rdz.$$

3. Jeżeli krzywa K jest zamknięta, to można pisać $\oint\limits_K Pdx + Qdy + Rdz$.

4. Jeżeli wzdłuż krzywej K działa siła $\overrightarrow{F} = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)]$ (tzn. funkcje P, Q, R są składowymi tej siły), to praca wykonywana przez tę siłę wyraża się wzorem

$$\int\limits_K Pdx + Qdy + Rdz.$$

Przykłady. Obliczyć całki
1. $\int\limits_{AB} (xy - 1)dx + x^2 ydy$, od punktu $A(1, 0)$ do $B(0, 2)$ po
a) prostej $2x + y = 2$;
b) łuku paraboli $4x + y^2 = 4$;
c) łuku elipsy $x = \cos t$, $y = 2\sin t$.
Rozwiązanie
a) Podstawiamy: $y = 2 - 2x$, $dy = -2dx$. Całka:

$$\int_1^0 [x(2 - 2x) - 1 + x^2(2 - 2x)(-2)]dx = \int_1^0 [4x^3 - 6x^2 + 2x - 1]dx = 1.$$

b) Podstawiamy: $x = 1 - \frac{1}{4}y^2$, $dx = -\frac{1}{2}ydy$. Całka:

$$\int_0^2 [(y - \frac{1}{4}y^3 - 1)(-\frac{1}{2}y) + (1 - \frac{1}{4}y^2)^2 y]dy = \int_0^2 (\frac{1}{16}y^5 + \frac{1}{8}y^4 - \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}y)dy = \frac{17}{15}.$$

c) Podstawiamy: $x = \cos t$, $dx = -\sin t dt$, $y = 2\sin t$, $dy = 2\cos t dt$. Całka:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(2\sin t\cos t - 1)(-\sin t) + \cos^2 t \cdot 2\sin t \cdot 2\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(-2\sin^2 t\cos t + \sin t + 4\cos^3 t\sin t)dt = \frac{4}{3}.$$

2. $\int\limits_{AB} (2a-y)dx - (a-y)dy$ po łuku cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $a > 0$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (odp.: πa^2).
3. W każdym punkcie okręgu $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ przyłożono zmienną siłę $\overrightarrow{F}$ o składowych $P = x + y$ i $Q = 2x$. Obliczyć pracę siły $\overrightarrow{F}$ po tym okręgu (odp.: πa^2).
4. Obliczyć pracę siły $\overrightarrow{F}$ o składowych $P = x$, $Q = y$ i $R = x + y - 1$ na odcinku AB, gdy $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$ (odp.: 13).
5. Obliczyć pracę siły $\overrightarrow{F}$ o składowych $P = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$ na krzywej K, gdzie K jest okręgiem $x^2 + y^2 = r^2$ przebieganym n razy w kierunku dodatnim.
Rozwiązanie. Krzywą K możemy opisać równaniami

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2n\pi$$

zatem

$$W = \oint\limits_K \Big(-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \Big) = \oint\limits_K \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \int_0^{2n\pi} dt = 2n\pi.$$

Jak widać praca nie zależy od promienia okręgu, tylko od liczby okrążeń.

3. Całki w zapisie wektorowym

W zastosowaniach całka krzywoliniowa jest często przedstawiona w zapisie wektorowym. Jeśli przyjmiemy

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

to $\vec{r}(t)$ jest wektorem wodzącym punktu $P(x,y,z)$ na krzywej K. Wektorem stycznym do krzywej K w punkcie P jest wtedy wektor:

$$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k},$$

a zatem

$$d\vec{r} = \vec{r}\,'(t)dt = (x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k})dt.$$

Oznaczmy także $\overrightarrow{F} = [P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)]$. Równość (1) można teraz napisać w postaci

$$\int\limits_K \overrightarrow{F} \circ \vec{r} dt = \int\limits_K \overrightarrow{F} \circ d\vec{r}$$

Wielkość $\overrightarrow{F} \circ d\vec{r}$ można interpretować jako pracę wykonywaną, gdy obiekt do którego przyłożona jest siła $\overrightarrow{F}$ przemieszcza się wzdłuż wektora $d\vec{r}$ stycznego do krzywej K.

4. Całki skierowane po krzywych zamkniętych

Jeżeli krzywa K jest zamknięta i ogranicza obszar D, przy czym kierunek na krzywej jest taki, że obszar pozostaje po lewej stronie krzywej K, to mówimy, że krzywa K jest *zorientowana dodatnio* względem obszaru D.
Bardzo ważny jest następujący związek między całką krzywoliniową i podwójną.

Twierdzenie 2. **(Greena)** *Jeżeli funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ mają ciągłe pochodne cząstkowe w obszarze D ograniczonym krzywą K regularną, zamkniętą, i zorientowaną dodatnio, to*

$$\oint_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \tag{2}$$

Dowód częściowy.
Załóżmy, że obszar D jest normalny względem obu osi. W szczególności, jako normalny względem osi Ox, obszar D można opisać nierównościami

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x).$$

Wykażemy, że

$$\oint_K P(x,y)dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy. \tag{3}$$

Krzywą K dzielimy na dwie części: niech K_1 oznacza krzywą dolną (określoną równaniem $y = g_1(x)$), a K_2 krzywą górną (określoną równaniem $y = g_2(x)$). Wtedy lewa strona tej równości to:

$$\begin{aligned} \oint_K P(x,y)dx &= \oint_{K_1} P(x,y)dx + \oint_{K_2} P(x,y)dx = \int_a^b P(x,g_1(x))dx + \int_b^a P(x,g_2(x))dx = \\ &= \int_a^b P(x,g_1(x))dx - \int_a^b P(x,g_2(x))dx \end{aligned}$$

Natomiast prawa strona to:

$$\begin{aligned} -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= -\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\int_a^b [P(x,y)]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx = \\ &= -\int_a^b \big(P(x,g_2(x)) - P(x,g_1(x)\big)dx = \int_a^b P(x,g_1(x))dx - \int_a^b P(x,g_2(x))dx \end{aligned}$$

Zatem równość (3) jest prawdziwa. Analogicznie, traktując D jako normalny względem osi Oy, tzn.

$$c \leqslant x \leqslant d, \quad h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(x)$$

można wykazać, że

$$\oint_K Q(x,y)dy = -\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy. \tag{4}$$

Dodając równości (3) i (4) stronami otrzymujemy wzór Greena.
W szczególności dla $P(x,y) = -\frac{1}{2}y$, $Q(x,y) = \frac{1}{2}x$ wzór (2) przyjmuje postać:

$$\frac{1}{2}\oint_K (-y)dx + xdy = \iint_D dxdy.$$

Prawa strona jest polem obszaru D. Zatem

Wniosek 2. *Pole obszaru D wyraża się wzorem*

$$P = \frac{1}{2}\oint_K xdy - ydx.$$

Przykłady. 1. Sprawdzić wzór Greena dla całki

$$\oint_K (x+y)dx - 2xdy$$

gdzie K jest konturem trójkąta o równaniach boków $x=0$, $y=0$, $x+y=a$ zorientowanym dodatnio. (Wynik: $-\frac{3}{2}a^2$).
2. Korzystając ze wzoru Greena obliczyć całkę

$$\oint_K y(1-x^2)dx + x(1+y^2)dy$$

gdzie K jest okręgiem $x^2+y^2=1$ zorientowanym dodatnio. (Wynik: $\frac{1}{2}\pi$).
3. Obliczyć pole figury ograniczonej asteroidą $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(a>0)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. (Wynik: $\frac{3}{8}\pi a^2$).
4. W przykładzie 5 (str. 5) pojawiła się całka

$$\oint_K \Big(-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \Big),$$

gdzie K było okręgiem $x^2+y^2=r^2$. Do tej całki nie można zastosować twierdzenia Greena, bo w punkcie $O=(0,0)$ leżącym wewnątrz krzywej funkcje P i Q nie są określone. Jeśli jednak K jest krzywą zamkniętą zorientowaną dodatnio i taką, że początek układu leży na zewnątrz K, to założenia twierdzenia Greena są spełnione. Mamy

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

zatem

$$\oint_K \Big(-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \Big) = \iint_D 0dxdy = 0.$$

5. Niezależność całki od krzywej całkowania

W zastosowaniach całki krzywoliniowej w fizyce ważna jest odpowiedź na pytanie, czy całka po krzywej łączącej dwa punkty A i B zależy od tej krzywej, czy tylko od punktów A i B. Przykład 1 ze strony 4 pokazuje, że ogólnie biorąc wybór krzywej jest istotny. Należy więc skupić się na ustaleniu czy są sytuacje w których wartość całki nie zależy od wyboru krzywej.

Definicja 4. *Zbiór ograniczony D, którego brzeg jest jedną krzywą regularną zamkniętą nazywamy* obszarem jednospójnym. *Ogólniej, gdy brzeg składa się z n krzywych mówimy o obszarze n-spójnym.*

Np. każdy obszar normalny względem którejkolwiek z osi jest obszarem jednospójnym. Pierścień kołowy jest obszarem dwuspójnym. Również koło bez środka jest obszarem dwuspójnym (brzeg ma dwie części: okrąg i środek!)

Twierdzenie 3. *Jeżeli funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ mają ciągłe pochodne cząstkowe w obszarze jednospójnym D ograniczonym krzywą K regularną, zamkniętą, i zorientowaną dodatnio, oraz A i B są punktami wewnętrznymi zbioru D to następujące warunki są równoważne*

1. *całka krzywoliniowa*

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

zależy jedynie od położenia punktów A i B (nie zależy od drogi całkowania);

2. w każdym punkcie wewnętrznym obszaru D

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y);$$

3. istnieje funkcja $F(x,y)$ różniczkowalna wewnątrz obszaru D taka, że

$$dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Funkcję $F(x,y)$ o której mowa w twierdzeniu nazywamy *funkcją pierwotną* różniczki zupełnej $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Tak więc warunek

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y); \tag{5}$$

jest konieczny i wystarczający na to, by istniała funkcja pierwotna, i jednocześnie by całka była niezależna od drogi.

Uwagi.

1. W interpretacji fizycznej, gdy siła $\overrightarrow{F} = [P(x,y), Q(x,y)]$ spełnia warunek (5), to jej funkcję pierwotną nazywamy *potencjałem*. Zatem jeśli siła ma potencjał, to praca nie zależy od drogi całkowania. Fizycy mówią też o *polu sił w obszarze D*, i że praca w polu potencjalnym nie zależy od drogi.

Przykład. Pole grawitacyjne. Jeżeli w początku układu Oxy umieścimy masę M, to masa jednostkowa umieszczona w punkcie $A = (x,y)$ będzie przyciągana z siłą $\overrightarrow{F}$ o wielkości $F = \frac{M}{r^2}$, gdzie $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Rzuty siły $\overrightarrow{F}$ na osie układu wynoszą

$$P = -\frac{Mx}{r^3}, \quad Q = -\frac{My}{r^3},$$

bo cosinusy kątów tworzonych przez tę siłę z osiami wynoszą $-\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}$. Łatwo sprawdzić, że wyrażenie

$$-\frac{Mx}{r^3}\,\mathrm{d}x - \frac{My}{r^3}\,\mathrm{d}y,$$

jest różniczką funkcji $U = \frac{M}{r}$. Zatem U jest potencjałem pola. Praca w tym polu nie zależy od drogi, tylko od różnicy potencjałów.

2. Jeżeli krzywa K jest zamknięta i funkcje $P(x,y)$, $Q(x,y)$ spełniają warunek (5), to

$$\oint_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Równość powyższą łatwo otrzymamy stosując twierdzenie Greena (prawa strona jest całką z zera).

Przykład. Z Uwagi 2 wiemy, że

$$\oint_K ydx + (x+y)dy = 0$$

po dowolnej krzywej zamkniętej K. Sprawdzić to obliczając całkę, gdy K jest krzywą zbudowaną z łuku paraboli $y = x^2$ i prostej $y = 4$.

3. W przypadku całki niezależnej od drogi można stosować oznaczenie

$$\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

gdzie (x_1,y_1) jest początkiem, a (x_2,y_2) — końcem drogi.

Przykład. Wyrażenie

$$2xdx + 2ydy$$

spełnia warunek (5), bo

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial (2y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial (2x)}{\partial y} = 0.$$

W tym przypadku dość łatwo jest odgadnąć funkcję pierwotną: $F = x^2 + y^2$. Można też zauważyć, że dla dowolnej stałej C funkcja $G = x^2 + y^2 + C$ jest także funkcją pierwotną. Funkcji pierwotnych jest więc nieskończenie wiele.
Oczywiście odgadywanie funkcji pierwotnej nie jest metodą. Ogólnie należy (po sprawdzeniu warunku (5)) utworzyć układ równań (w którym niewiadomą jest funkcja F):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

i rozwiązać go. To wymaga dwukrotnego całkowania. Wyjaśni to następujący przykład.
Przykład. Wykazać, że wyrażenie

$$(1 - \sin 2x)dy - (3 + 2y\cos 2x)dx$$

ma funkcję pierwotną. Wyznaczyć tę funkcję.
Rozwiązanie. Sprawdzamy warunek istnienia funkcji pierwotnej,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial (3 + 2y\cos 2x)}{\partial y} = -2\cos 2x,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial (1 - \sin 2x)}{\partial x} = -2\cos 2x.$$

Zatem $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ dla dowolnych x, y.
Aby wyznaczyć funkcję pierwotną całkujemy funkcję $P(x, y)$ względem x. Stała całkowania może zawierać y, więc piszemy ją jako $\varphi(y)$.

$$F(x, y) = -\int (3 + 2y\cos 2x)\, dx = -3x - y\sin 2x + \varphi(y)$$

Funkcję $\varphi(y)$ możemy wyznaczyć korzystając z warunku $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) = 1 - \sin 2x$. Zatem:

$$\frac{\partial(-3x - y\sin 2x + \varphi(y))}{\partial y} = 1 - \sin 2x$$

czyli $-\sin 2x + \varphi'(y) = 1 - \sin 2x$, a więc $\varphi'(y) = 1$. Stąd $\varphi(y) = y + C$. Zatem

$$F(x, y) = -3x - y\sin 2x + y + C.$$

Stałą C na ogół pomijamy, bo do rachunków wystarcza jakakolwiek funkcja pierwotna.
Mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4. *Jeżeli $F(x, y)$ jest funkcją pierwotną różniczki zupełnej $Pdx + Qdy$ w obszarze jednospójnym D, to*

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = F(B) - F(A)$$

dla dowolnej krzywej $AB \subset D$. Tutaj symbole $F(B)$ i $F(A)$ oznaczają wartości funkcji F w punktach B, A.

Przykład. Obliczyć całkę

$$\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$$

wzdłuż dowolnej drogi nie przecinającej osi Oy.
Rozwiązanie. Sprawdzamy warunek istnienia funkcji pierwotnej,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial(\frac{y}{x^2})}{\partial y} = \frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(-\frac{1}{x})}{\partial x} = \frac{1}{x^2}.$$

Zatem $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ dla $x \neq 0$.
Teraz całkujemy funkcję $P(x,y)$ względem x:

$$F(x,y) = \int \frac{y}{x^2}\, dx = -\frac{y}{x} + \varphi(y)$$

Ponieważ $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y) = -\frac{1}{x}$, więc:

$$\frac{\partial(-\frac{y}{x} + \varphi(y))}{\partial y} = -\frac{1}{x}$$

czyli $-\frac{1}{x} + \varphi'(y) = -\frac{1}{x}$, a więc $\varphi'(y) = 0$. Stąd $\varphi(y) = C$. Zatem

$$F(x,y) = -\frac{y}{x} + C.$$

Skorzystamy teraz z twiedzenia 4 przyjmując $F(x,y) = -\frac{y}{x}$:

$$\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2} = F(1,2) - F(2,1) = -2 - (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}.$$

Alternatywnie, całkę można obliczyć wybierając krzywą całkowania. Jeśli oznaczymy: $(2,1) = A$, $(1,2) = B$, $(1,1) = C$, to krzywą może być odcinek AB lub łamana ACB. Wybór łamanej jest często korzystny rachunkowo.