Maciej Grzesiak
Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej

Całki oznaczone

1. Definicja całki oznaczonej

Niech dana będzie funkcja f ciągła w przedziale $[a, b]$.
Przedział $[a, b]$ podzielimy na n podprzedziałów punktami

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Długość $i-$tego podprzedziału oznaczymy $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, a cały zbiór n podprzedziałów oznaczymy Δ_n. Podziałowi Δ_n możemy przyporządkować liczbę $\delta_n = \max \Delta x_i$, nazywaną *średnicą podziału*.
Możemy rozpatrywać ciąg podziałów (Δ_n). Taki ciąg nazywamy *normalnym*, gdy

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

Dla danego podziału Δ_n wybieramy w każdym podprzedziale liczbę ξ_i, $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ i tworzymy sumę

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{1}$$

Jeżeli dla każdego ciągu normalnego podziałów przedziału $[a, b]$ każdy ciąg sum (σ_n) dąży do granicy skończonej (niezależnej od wyboru punktów ξ_i), to granicę tę nazywamy *całką oznaczoną* funkcji $f(x)$ w przedziale $[a, b]$ i oznaczamy przez

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sumy (1) nazywamy *sumami całkowymi* lub *sumami Riemanna*[1].
Pojedyncze składniki sumy (1) są polami prostokątów o podstawie Δx_i i wysokości $f(\xi_i)$. Suma tych pól jest przybliżeniem pola figury ograniczonej od dołu osią Ox, od góry wykresem funkcji f, a z boków odcinkami prostych $x = a$, $x = b$ (taką figurę nazywamy *trapezem krzywoliniowym*). Przybliżenie to jest coraz dokładniejsze gdy n rośnie. Wartość graniczna, czyli całka oznaczona, jest polem trapezu krzywoliniowego.
Uwaga. Powyższe określenie całki dotyczy przypadku gdy $a < b$. Przyjmujemy ponadto, że

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ dla } a < b.$$

Przykład. Obliczymy z definicji całkę $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$. W tym celu rozpatrzymy ciąg podziałów na n równych części:

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = 1.$$

[1] Bernhard Riemann 1826-1866

Punkty ξ_i wybierzemy jako środki odpowiednich odcinków:

$$\xi_i = x_{i-1} + \frac{1}{2n} = \frac{i-1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{2i-1}{2n}.$$

Wtedy

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2n}\frac{1}{n} = \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = \frac{1}{2n^2}\cdot\frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n = \frac{1}{2}.$$

Ciąg jest stały, więc

$$\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \frac{1}{2}.$$

Zauważmy, że dla innego wyboru liczb ξ_i, np. $\xi_i = x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$ otrzymamy

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{0+(n-1)}{2}\cdot n = \frac{n-1}{2n}.$$

Tym razem ciąg nie jest stały, ale granica jest taka sama:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Jeszcze inaczej: gdy $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$, to otrzymamy

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n = \frac{n+1}{2n}.$$

I znowu granica jest taka sama:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Twierdzenie 1. (własności całki) *1.* $\int\limits_a^b Af(x)\,\mathrm{d}x = A\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$*;*

2. $\int\limits_a^b (f(x)\pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$*;*

3. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *dla* $a < c < b$*;*

4. Jeżeli $f(x) \leqslant g(x)$ *dla* $x \in [a,b]$*, to* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$*.*

Twierdzenie 2. (o istnieniu całki) *Jeżeli funkcja f jest ograniczona na $[a,b]$ i ma na tym przedziale skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju, to istnieje całka oznaczona* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$*.*

Mówimy wtedy, że funkcja f jest całkowalna na $[a,b]$.

Wniosek 1. *Funkcja f ciągła na przedziale $[a,b]$ jest całkowalna na $[a,b]$.*

Uwaga. Litera, jakiej użyjemy jako zmiennej całkowania jest nieistotna, bo

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \cdots$$

Całka oznaczona jest liczbą, a całka nieoznaczona — zbiorem funkcji. Niemniej te dwa pojęcia są blisko ze sobą związane. Następujące twierdzenia, wyjaśniające ten związek, są podstawowymi twierdzeniami rachunku całkowego.

Twierdzenie 3. (o całce ze zmienną górną granicą) *Jeżeli funkcja f jest ciągła na $[a,b]$, to dla każdego $x \in [a,b]$ istnieje całka oznaczona $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Można więc określić funkcję*

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Funkcja $G(x)$ jest różniczkowalna na $[a,b]$ i $G'(x) = f(x)$.

Nieformalny dowód twierdzenia. Chcemy wykazać, że dla dowolnego $x \in [a,b]$ jest $G'(x) = f(x)$, tzn. że

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x).$$

Gdy $f(x) \geqslant 0$ na $[a,b]$, to $G(x)$ jest równe polu pod wykresem funkcji f, od a do x. Zatem $G(x+h) - G(x)$ jest równe polu pod wykresem funkcji f, od x do $x+h$. Intuicyjnie jest zrozumiałe, że to pole jest równe polu prostokąta o podstawie h i wysokości równej $f(z)$ dla pewnego $z \in [x, x+h]$. Wtedy iloraz $\frac{G(x+h)-G(x)}{h}$ jest równy $f(z)$. Z ciągłości funkcji f wynika, że gdy $h \to 0$, to $z \to x$ oraz $f(z) \to f(x)$. Tego właśnie chcieliśmy dowieść.

Przykład. Obliczyć $G(x)$, gdy

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{dla} \quad x \in [-2,0] \\ 1+x & \text{dla} \quad x \in [0,3] \end{cases}$$

Rozwiązanie. Traktując $G(x)$ jak pole odpowiedniego obszaru zauważamy najpierw, że gdy $x \in [-2,0]$, to obszar jest trapezem o podstawach 3 i $f(x) = 1-x$ oraz wysokości $x+2$. Zatem $G(x) = \frac{3+1-x}{2}(x+2) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$. W szczególności $G(0) = 4$. Gdy $x \in [0,3]$, to obszar jest sumą dwóch trapezów: tego na lewo od osi Oy i trapezu o podstawach 1 i $f(x) = 1+x$ oraz wysokości x. Zatem $G(x) = G(0) + \frac{1+1+x}{2}x = \frac{1}{2}x^2 + x + 4$. Ostatecznie

$$G(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 & \text{dla} \quad x \in [-2,0] \\ \frac{1}{2}x^2 + x + 4 & \text{dla} \quad x \in [0,3] \end{cases}$$

Można sprawdzić (z definicji), że ta funkcja jest różniczkowalna w zerze.

Twierdzenie 4. (Newtona-Leibniza) *Jeżeli F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f ciągłej na $[a,b]$, to*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

D o w ó d. Niech G oznacza funkcję pierwotną zdefiniowaną wyżej: $G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Wtedy dla dowolnego $x \in [a,b]$

$$G(x) - F(x) = C.$$

Dla $x = a$ jest $G(a) = 0$. Zatem $C = -F(a)$, a więc

$$G(x) - F(x) = -F(a).$$

Jeśli teraz podstawimy $x = b$, to

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - F(b) = -F(a),$$

a zatem

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

To kończy dowód.
Zamiast $F(b)-F(a)$ piszemy $F(x)|_a^b$ lub $[F(x)]_a^b$.

Przykłady. 1. $\int\limits_1^8 \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$;

2. $\int\limits_1^2 (2x^2+\frac{3}{x^3})\,\mathrm{d}x$;

3. $\int\limits_0^\pi (2\sin x - 3\cos x)\,\mathrm{d}x$.

4. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$.

Następujące twierdzenia ułatwiają obliczanie całek.

Twierdzenie 5. (o całkowaniu przez podstawienie) *Jeżeli funkcja $f(t)$ jest ciągła na zbiorze wartości funkcji $t=\varphi(x)$ ciągłej i mającej ciągłą pochodną w $[\alpha,\beta]$ oraz jeżeli $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, to*

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Przykłady. 1. $\int\limits_4^9 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}-1}$;

Podstawiamy $\sqrt{x}-1=t$, a więc $x=(t+1)^2$ oraz $\mathrm{d}x=2(t+1)\,\mathrm{d}t$. Gdy $x=4$ to $t=1$, a gdy $x=9$ to $t=2$. Zatem

$$\int\limits_4^9 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}-1} = \int\limits_1^2 \frac{2(t-1)}{t}\,\mathrm{d}t = 2[t-\ln t]_1^2 = 2(1-\ln 2).$$

$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$; Podstawiamy $e^x=t$, a więc $x=\ln t$ oraz $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t}$. Gdy $x=0$ to $t=1$, a gdy $x=1$ to $t=e$. Zatem

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}} = \int\limits_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t(t+\frac{1}{t})} = \int\limits_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t|_1^e = \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}.$$

3. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\sin x\,\mathrm{d}x$.

Podstawiamy $t=\cos x$, a więc $\mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$. Gdy $x=0$ to $t=1$, a gdy $x=\frac{\pi}{2}$ to $t=0$. Zatem

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\sin x\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^0 (-t^2)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$$

Twierdzenie 6. (o całkowaniu przez części) *Jeżeli funkcje $u(x)$ i $v(x)$ mają w przedziale $[a,b]$ ciągłe pochodne, to*

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Przykłady. 1. $\int\limits_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$;

2. $\int\limits_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$;

3. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x.$

Ze wzorów redukcyjnych dla całek nieoznaczonych

$$\int \sin^n x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, \mathrm{d}x, \quad n \geqslant 2,$$

$$\int \cos^n x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, \mathrm{d}x, \quad n \geqslant 2,$$

wynikają wzory dla całek oznaczonych:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x \, \mathrm{d}\, x = \frac{n-1}{n} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, \mathrm{d}\, x \quad n \geqslant 2,$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x \, \mathrm{d}\, x, \frac{n-1}{n} = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \, \mathrm{d}\, x \quad n \geqslant 2,$$

2. Zastosowanie całek w geometrii

2.1. Obliczanie pól

Pole trapezu krzywoliniowego ograniczonego od dołu osią Ox, od góry wykresem funkcji $f(x) \geqslant 0$, a z boków odcinkami prostych $x = a$, $x = b$ wynosi:

$$P = \int\limits_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Jeżeli funkcja ograniczająca z góry ma równania parametryczne $x = x(t)$, $y = y(t)$, gdzie $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, oraz

— $x(t)$ jest rosnąca i ma ciągłą pochodną na $[\alpha, \beta]$

— $y(t)$ jest ciągła i nieujemna na $[\alpha, \beta]$

— $x(\alpha) = a, y(\beta) = b$

to:

$$P = \int\limits_\alpha^\beta y(t) x'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Jeżeli $x(t)$ jest malejąca (pozostałe założenia jak wyżej), to

$$P = \int\limits_\alpha^\beta y(t) |x'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Jeżeli obszar jest ograniczony od dołu wykresem funkcji g, od góry wykresem funkcji f, a z boków odcinkami prostych $x = a$, $x = b$, to wzór na pole ulega modyfikacji i ma postać:

$$P = \int\limits_a^b (f(x) - g(x)) \, \mathrm{d}x.$$

Uwaga. Nie ma znaczenia, czy wykresy są nad osią Ox, czy nie. Ważne jest jedynie by $f(x) - g(x) \geqslant 0$ dla dowolnego $x \in [a, b]$.

Przykłady. Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi:

1. $xy = 1$, $y = 0$, $x = \frac{1}{10}$, $x = 10$.
2. $y^2 = 4x + 4$, $y = 2 - x$.
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (elipsa).
Wsk. Korzystamy z symetrii elipsy: $P = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$. Wartość całki uzyskujemy bez liczenia interpretując ją jako pole ćwiartki koła. Można też obliczać pole posługując się równaniami parametrycznymi elipsy $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.
4. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $y = 0$ (łuk cykloidy).
Jeżeli w biegunowym układzie współrzędnych mamy obszar określony nierównościami:

$$\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\ 0 \leqslant \rho \leqslant \rho(\varphi),$$

gdzie $\rho(\varphi)$ jest pewną krzywą (taki obszar jest *trójkątem krzywoliniowym*), to jego pole obliczamy stosując wzór

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Uzasadnienie. Przedział $[\alpha, \beta]$ dzielimy na podprzedziały:

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$$

a obszar na podobszary W_i, które są w przybliżeniu wycinkami koła; kąt wycinka W_i to $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, a promień to $\rho(\psi_i)$, gdzie $\psi_i \in (\varphi_{i-1}, \varphi_i)$ jest pewną liczbą. Suma pól tych wycinków

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(\rho(\psi_i))^2 \Delta\varphi_i$$

jest przybliżoną wartością pola obszaru, które jest tym lepsze im większe jest n. W granicy otrzymujemy całkę

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(\rho(\psi_i))^2 \Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Przykłady. Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi:
1. $\rho = 2\varphi$ dla $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$;
2. $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, gdzie $a > 0$ (lemniskata Bernoullego)

2.2. Długość łuku

Aby obliczyć długość łuku krzywej $y = f(x)$ gładkiej (tzn. zakładamy, że funkcja f jest różniczkowalna) dla $a \leqslant x \leqslant b$ przedział $[a, b]$ dzielimy punktami

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

i tworzymy łamaną $P_0P_1\ldots P_n$, gdzie $P_i = (x_i, f(x_i))$. Długość tej łamanej jest sumą długości odcinków $|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$.
Z twierdzenia o wartości średniej istnieje $w_i \in (x_i - x_{i-1})$ takie, że

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(w_i)(x_i - x_{i-1})$$

Zatem

$$\begin{aligned}|P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(w_i)(x_i - x_{i-1}))^2} = (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(w_i))^2} = \\ &= \sqrt{1 + (f'(w_i))^2}\Delta x_i,\end{aligned}$$

gdzie $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Długość całej łamanej wynosi

$$\sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(w_i))^2} \Delta x_i,$$

i jest to przybliżenie długości łuku krzywej $y = f(x)$. W granicy otrzymujemy całkę

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x.$$

Zatem otrzymaliśmy następujące twierdzenie

Twierdzenie 7. *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na (a, b), to długość łuku krzywej $y = f(x)$ dla $a \leqslant x \leqslant b$ jest równa*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Przykłady. Obliczyć długości łuków krzywych:
1. $f(x) = 1 - \ln \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$;
2. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, gdzie $a > 0$ (asteroida).
Wsk. Korzystamy z symetrii asteroidy i liczymy długość łuku w I ćwiartce płaszczyzny. Stosując wzór na pochodną funkcji uwikłanej sprawdzamy najpierw, że $1+(y')^2 = a^{2/3}x^{-2/3}$, co umożliwia obliczenie pierwiastka.
Odp. $6a$.
Można też obliczyć długość asteroidy posługując się równaniami parametrycznymi:

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a \sin^3 t$$

i wzorem podanym niżej.

Twierdzenie 8. *Jeżeli funkcje $x(t)$ i $y(t)$ są różniczkowalne na (α, β), to długość łuku krzywej określonej parametrycznie: $x = x(t)$, $y = y(t)$ dla $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, wyraża się wzorem:*

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, \mathrm{d}t. \tag{3}$$

Jeżeli we wzorze (3) podstawimy $x = t$, $y = f(t)$, to otrzymamy wzór (2).
Zatem wzór (2) jest szczególnym przypadkiem wzoru (3).
Przykłady. Obliczyć długości łuków krzywych:
1. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (łuk cykloidy).
Odp. $8a$.
2.$x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$
W biegunowym układzie współrzędnych, dla krzywej $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, \mathrm{d}\varphi. \tag{4}$$

Również ten wzór jest szczególnym przypadkiem wzoru (3), gdy $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$ (sprawdzić!).
Przykłady. Obliczyć długości łuków krzywych:
1. $\rho = a\sin^3 \frac{\varphi}{3}$, $\varphi \in [0, 3\pi]$;
2. $\rho = 2a\sin\varphi$, $a > 0$, $\varphi \in [0, \pi]$.

2.3. Objętość i pole powierzchni brył obrotowych

W układzie Oxy rozpatrujemy krzywą o równaniu $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, i obracamy ją dokoła osi Ox. Krzywa zakreśla wtedy powierzchnię. Po "zamknięciu" tej powierzchni płaszczyznami $x = a$ i $x = b$ otrzymujemy bryłę, której objętość wynosi:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

a pole powierzchni bocznej

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

W przypadku równań parametrycznych $x = x(t)$, $y = y(t)$ dla $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, odpowiednie wzory to:

$$V = \pi \int_\alpha^\beta y^2(t)|x'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Przykłady. 1. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dokoła osi odciętych.
Odp. $\frac{4}{3}\pi ab^2$.
2. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu jednego łuku cykloidy

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

dokoła osi odciętych.

$$V = 2\pi \int_0^{\pi a} y^2(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^{\pi} y^2(t)x'(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi \int_0^{\pi} 8a^3 \sin^6 \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 5\pi^2 a^3.$$

3. Obliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót dokoła osi Ox krzywej $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.
Wsk.: zastosować wzór:

$$\int \sqrt{x^2 + a}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + C$$

Odp. $2\pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$.
4. Obliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót asteroidy $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$ dokoła osi Ox.
Odp. $\frac{12}{5}\pi a^2$.

3. Zastosowania fizyczne

3.1. Droga

Jeżeli punkt porusza się po prostej ze zmienną prędkością $v = v(t)$, to droga przebyta w przedziale czasu $[t_1, t_2]$ wynosi

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Przykład. Prędkość punktu wynosi $v = 0,6t^2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sek}}$. Jaką drogę przebędzie punkt w czasie $T = 10$ sek począwszy od początku ruchu? Jaka jest prędkość średnia?
Odp. Mamy

$$s = \int_{0}^{10} 0,6t^2\,\mathrm{d}t = 200\,\mathrm{m}.$$

Prędkość średnia: $v_0 = \frac{200}{10} = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sek}}$.
Przykład. Punkt materialny porusza się po prostej pod działaniem stałej siły F. Znajdź jego prędkość $v = v(t)$ i przyspieszenie $a = a(t)$.
Rozwiązanie. Na mocy II zasady dynamiki $a = \frac{F}{m}$. Zatem

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{F}{m}\,\mathrm{d}u = v_0 + \frac{F}{m}(t - t_0),$$

gdzie $v_0 = v(t_0)$.
Następnie

$$s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} \big(v_0 + \frac{F}{m}(t - t_0)\big)\,\mathrm{d}u = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{F}{2m}(t - t_0)^2.$$

W szczególności w pobliżu Ziemi, gdy $\frac{F}{m} = -g$ otrzymujemy wzór na drogę przy rzucie pionowym (pomijamy opór powietrza):

$$s(t) = v_0(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2.$$

Gdy $t_0 = 0$ wzór upraszcza się do

$$s(t) = v_0 t - \frac{g}{2}t^2.$$

Należy pamiętać, że całka funkcji prędkości daje w wyniku drogę "netto". Na przykład dla obiektu wyrzuconego w górę z prędkością $v_0 = 19,6$ m/s funkcja prędkości to

$$v(t) = v_0 - gt = 19,6 - 9,8t.$$

Zatem droga netto w czasie pierwszych 4. sekund to

$$s = \int_0^4 (-9,8t + 19,6)dt = \Big[-9,8\frac{t^2}{2} + 19,6t\Big]_0^4 = 0,$$

ale droga całkowita to

$$s = \int_0^2 (-9,8t + 19,6)dt + \Big|\int_2^4 (-9,8t + 19,6)dt\Big| = 19,6 + |-19,6| = 39,2.$$

3.2. Praca

Jeżeli zmienna siła $F = f(x)$ działa w kierunku osi Ox, to praca tej siły na przedziale $[x_1, x_2]$ wynosi

$$W = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Przykład. Jaką pracę należy wykonać aby rozciągnąć sprężynę o 6 cm, jeżeli siła 1 N rozciąga ją o 1 cm?
Odp. Zgodnie z prawem Hooke'a $F = kx$ dla pewnej stałej k. Podstawiając $F = 1[\mathrm{N}]$ i $x = 0,01[\mathrm{m}]$ otrzymujemy $k = 100$. Zatem $F = 100x$ oraz

$$W = \int_{0}^{0,06} 100x\,\mathrm{d}x = 0,18\,\mathrm{J}.$$

Przykład. Jaką pracę należy wykonać aby wynieść 10 kg obiekt z powierzchni Ziemi na odległość D od środka Ziemi?
Rozwiązanie. Na mocy prawa grawitacji siła działająca na obiekt jest równa $F = \frac{k}{r^2}$, gdzie $k = GMm$ jest stałą (G to stała grawitacji, M masa Ziemi, m masa obiektu). Zatem

$$W = \int_{r_0}^{D} \frac{k}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{k}{r}\Big|_{r_0}^{D} = -\frac{k}{D} + \frac{k}{r_0},$$

gdzie r_0 jest promieniem kuli ziemskiej.
Można wyliczyć, że $k \approx 3,9867 \cdot 10^{15}$. Biorąc $r_0 = 6378$ km otrzymamy liczbowo (w dżulach)

$$W = -\frac{k}{D} + 6,25 \cdot 10^{8}.$$

Gdy D rośnie, to W też rośnie, gdyż składnik który odejmujemy maleje. Praca jednak nie przekroczy $6,25 \cdot 10^8$ dżuli.

4. Całki niewłaściwe

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w $(a, b]$ i jest nieograniczona w otoczeniu punktu a, to określamy *całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju*:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Analogicznie określamy całkę z niewłaściwością w granicy górnej:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jeżeli powyższe granice istnieją i są skończone, to całki nazywamy *zbieżnymi*; w przeciwnym przypadku (tj. gdy granice nie istnieją lub są niewłaściwe) całki nazywamy *rozbieżnymi*.

Przykłady. 1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2$;

2. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln 2}$;

3. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$ (rozbieżna).

Czasem wystarcza informacja, czy całka jest zbieżna, czy nie. Można wtedy zastosować *kryterium porównawcze*:

Jeżeli $f(x) \leqslant g(x)$ *w* (a,b) *i całka* $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *jest zbieżna, to* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *też jest zbieżna.*

Całkami niewłaściwymi drugiego rodzaju nazywamy całki po przedziale nieograniczonym:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty} \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Przykłady. 1. $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$;

2. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+x} = \ln 2$;

3. $\int\limits_{-\infty}^0 \sin x\,\mathrm{d}x$ jest rozbieżna.

4. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$