Maciej Grzesiak
Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej

Szeregi

1. Szeregi liczbowe

Definicja 1. Szeregiem liczbowym *nazywamy wyrażenie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \tag{1}$$

Liczby a_n*,* $n = 1, 2, \ldots$ *nazywamy* wyrazami *szeregu. Natomiast sumę*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{2}$$

nazywamy n-tą sumą częściową *szeregu. Jeżeli istnieje granica*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S,$$

to szereg (1) nazywamy zbieżnym*, a liczbę* S *nazywamy* sumą szeregu*. W przeciwnym przypadku mówimy, że szereg jest* rozbieżny*.*

W definicji 1 numeracja wyrazów rozpoczyna się od 1. Nie ma to jednak istotnego znaczenia, bo podobnie można zdefiniować $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, gdzie n_0 jest dowolną liczbą naturalną. Ten szereg różni się od szeregu (1) tym, że pierwsze $n_0 - 1$ wyrazów jest równe 0. Ogólniej, można stwierdzić, że zmiana dowolnej skończonej liczby wyrazów nie ma wpływu na zbieżność (tzn. po takiej zmianie szereg zbieżny pozostanie nadal zbieżny, a szereg rozbieżny pozostanie nadal rozbieżny).

Przykłady. Znaleźć wzór na sumę s_n i zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{300}{2^n}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{300}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Achilles i żółw. Podany przez Zenona z Elei [1] paradoks Achillesa i żółwia przedstawia się zazwyczaj tak: Achilles (słynący jako szybkobiegacz) ściga żółwia, który jest daleko w przodzie, gdy heros zaczyna bieg. Następnie Achilles dobiega do miejsca, w którym niedawno był żółw, ale w tym czasie zwierzak dochodzi już do następnego miejsca, które za chwilę osiąga Achilles, ale żółw dochodzi w tym czasie do nowego, Achilles znowu dobiega, ale żółw jest dalej, itd. A więc Achilles nigdy nie dogoni żółwia – konkludował Zenon. Paradoks Zenona można wyjaśnić przy pomocy szeregów.

[1] Zenon z Elei, ok. 490 p.n.e. – ok. 430 p.n.e., filozof grecki

Zadanie. Achilles znajduje się w odległości d od żółwia i ściga go z prędkością V. Żółw porusza się z prędkością v.
Niech t_1 oznacza czas w jakim Achilles przebędzie odległość d, a s_1 — drogę przebytą przez żółwia w tym czasie.
Ogólnie: t_n oznacza czas w jakim Achilles przebędzie odległość s_{n-1}, a s_n — drogę przebytą przez żółwia w czasie t_n.
Obliczyć sumy szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$. Po jakim czasie Achilles dogoni żółwia?

Mamy: $t_1 = \frac{d}{V}$, $s_1 = t_1 v$, $t_2 = \frac{s_1}{V}$, $s_2 = t_2 v$, ...
Ogólnie: $t_n = \frac{s_{n-1}}{V} = \frac{v t_{n-1}}{V}$, $s_n = t_n v$. Zatem $t_n = \frac{d}{V}\left(\frac{v}{V}\right)^{n-1}$, więc jest to ciąg geometryczny.
Ostatecznie

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \frac{d}{V-v}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} s_n = d\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \frac{vd}{V-v}.$$

Zauważmy, że gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to zarówno s_n jak i s_{n-1} dążą do granicy S. Ponieważ $a_n = s_n - s_{n-1}$, więc $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Mamy więc następujące twierdzenie

Twierdzenie 1. (warunek konieczny zbieżności szeregu) *Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to jego wyraz ogólny a_n dąży do 0.*

Ten warunek nie jest wystarczający. Jest nieskończenie wiele szeregów, których wyraz ogólny a_n dąży do 0, ale które są rozbieżne. Bardzo ważnym przykładem jest *szereg harmoniczny*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

Na szeregach można wykonywać działania arytmetyczne.

Twierdzenie 2. *1. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ jest zbieżny oraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ jest zbieżny oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Na ogół trudne jest wyznaczenie wzoru analitycznego na sumę s_n, a co za tym idzie wyznaczenie sumy szeregu S. Należy więc postawić zadanie łatwiejsze: zbadać tylko zbieżność szeregu. Jeśli wiadomo, że szereg jest zbieżny, to można potem obliczać chociaż jego wartość przybliżoną (biorąc np. 100 czy 1000 wyrazów szeregu, zależnie od dokładności przybliżenia jaką chcemy osiągnąć). Twierdzenia podające warunki zbieżności szeregu nazywamy *kryteriami zbieżności.*
Na początek zajmiemy się szeregami o wartościach nieujemnych.

Twierdzenie 3. (kryterium porównawcze) *Jeżeli $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, to*
1. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;
2. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Aby to twierdzenie skutecznie stosować trzeba dysponować pewną "bazą informacji", tj. znać jakąś grupę szeregów zbieżnych bądź rozbieżnych. Będziemy korzystali z następującej informacji:
Szereg postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

(tzw. szereg Dirichleta) jest zbieżny dla $\alpha > 1$, a rozbieżny dla $\alpha \leqslant 1$.
Zauważmy, że dla $n = 1$ otrzymujemy szereg harmoniczny.

Przykłady. Zbadać zbieżność szeregu:
1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$;
Ponieważ $\frac{\sin^2 n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, więc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$ też jest zbieżny.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;
Teraz $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ jest rozbieżny (bo jest to szereg harmoniczny bez pierwszego wyrazu), więc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ też jest rozbieżny.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^2-3}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+3}$.

Twierdzenie 4. (kryterium ilorazowe) *Jeżeli* $a_n \geqslant 0$ *i* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, *to*
1. jeżeli $q < 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny;*
2. jeżeli $q > 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Kryterium ilorazowe nazywane jest też kryterium d'Alemberta. Nie rozstrzyga ono zbieżności, gdy $q = 1$, a takich przypadków jest wiele. Np. dla szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

otrzymamy $q = 1$. Jednak pierwszy z nich jest rozbieżny, a drugi zbieżny.
Przykłady. Zbadać zbieżność szeregu:
1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$.

Twierdzenie 5. (kryterium pierwiastkowe) *Jeżeli* $a_n \geqslant 0$ *i* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, *to*
1. jeżeli $q < 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny;*
2. jeżeli $q > 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Inna nazwa: kryterium Cauchy'ego. Gdy $q = 1$, nie rozstrzyga ono zbieżności.
Przykłady. Zbadać zbieżność szeregu:
1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{2n+3}\right)^n$;
2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

Twierdzenie 6. (kryterium całkowe) *Niech funkcja* $f(x)$ *będzie nieujemna i nierosnąca dla* $x \in [1, \infty]$. *Wtedy szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka niewłaściwa* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *jest zbieżna.*

Przykłady. 1. Wykazać rozbieżność szeregu harmonicznego obliczając całkę $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx$.
2. Wykazać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)^{\alpha}}$ dla $\alpha > 1$.
Wszystkie powyższe kryteria zakładały nieujemność wyrazów szeregu.

Definicja 2. *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nazywamy* bezwzględnie zbieżnym, *gdy szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *utworzony z jego wartości bezwzględnych jest zbieżny. Szereg zbieżny, ale nie bezwzględnie zbieżny, nazywamy* warunkowo zbieżnym.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to jest zbieżny. Z tej uwagi wynika praktyczne postępowanie przy badaniu zbieżności szeregu. Najpierw należy wyjaśnić, czy szereg jest bezwzględnie zbieżny. Mamy tu do dyspozycji cztery wymienione wyżej kryteria zbieżności. Jeśli okaże się jednak, że szereg nie jest bezwzględnie zbieżny, to powstaje problem zbadania zbieżności warunkowej. Tu jednak nie ma skutecznych twierdzeń. W zasadzie mamy tylko jedno twierdzenie, i to dotyczące dość specjalnego szeregu.

Definicja 3. *Szereg postaci*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots ,$$

gdzie $a_n \geqslant 0$, *nazywamy* naprzemiennym.

Takim szeregiem jest np.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

nazywany szeregiem *anharmonicznym.*

Twierdzenie 7. (kryterium Leibniza) *Jeśli ciąg a_n jest nieujemny, nierosnący i dąży do 0, to $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ jest zbieżny.*

Przykłady.
1. Ciąg $\frac{1}{n}$ jest nieujemny, nierosnący i dąży do 0. Zatem szereg anharmoniczny jest zbieżny (ale tylko warunkowo, bo utworzony z jego wartości bezwzględnych szereg harmoniczny jest rozbieżny).
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$. (warunkowo zbieżny)
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. (warunkowo zbieżny)
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$. (rozbieżny — warunek konieczny nie jest spełniony)
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. (bezwzględnie zbieżny)

Na zakończenie anegdota
(cytat ze strony `http://www.math.utah.edu/~cherk/mathjokes.html`).

The following problem can be solved either the easy way or the hard way.
Two trains 200 miles apart are moving toward each other; each one is going at a speed of 50 miles per hour. A fly starting on the front of one of them flies back and forth between them at a rate of 75 miles per hour. It does this until the trains collide and crush the fly to death. What is the total distance the fly has flown?
The fly actually hits each train an infinite number of times before it gets crushed, and one could solve the problem the hard way with pencil and paper by summing an infinite series of distances. The easy way is as follows: Since the trains are 200 miles apart and each train is going 50 miles an hour, it takes 2 hours for the trains to collide. Therefore the fly was flying for two hours. Since the fly was flying at a rate of 75 miles per hour, the fly must have flown 150 miles. That's all there is to it.

When this problem was posed to John von Neumann[2], he immediately replied: "150 miles".

"It is very strange", said the poser, "but nearly everyone tries to sum the infinite series".

"What do you mean, strange?" asked von Neumann. "That's how I did it!"

2. Szeregi potęgowe

Szereg postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

którego wyrazy są funkcjami zmiennej x, określone w tej samej dziedzinie D, nazywamy *szeregiem funkcyjnym.* Dla ustalonego $x \in D$ szereg może być zbieżny lub nie. Zbiór wszystkich $x \in D$ dla których szereg jest zbieżny nazywamy *obszarem zbieżności* szeregu. Obszar ten może być zbiorem pustym.
Np. dla szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

obszarem zbieżności jest przedział $(1, \infty)$, a dla szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

obszarem zbieżności jest przedział $(-1, 1)$.
W dalszym ciągu ograniczymy się do dwóch specjalnych grup szeregów: potęgowych i trygonometrycznych.

[2] John von Neumann, 1903 – 1957, matematyk, inżynier chemik, fizyk i informatyk.

2.1. Określenie i promień zbieżności szeregu

Definicja 4. *Szereg postaci*
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \tag{3}$$
nazywamy szeregiem potęgowym.

Dla $x_0 = 0$ mamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Jeśli $x = 0$, to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0$, jest to więc szereg zbieżny. Aby znaleźć inne wartości x dla których szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny można posłużyć się kryterium ilorazowym. Obliczamy
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|q,$$
gdzie $q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Z kryterium ilorazowego wiadomo, że jeśli $|x|q < 1$, czyli jeśli $|x| < \frac{1}{q}$, to szereg jest zbieżny. Natomiast jeśli $|x|q > 1$, czyli $|x| > \frac{1}{q}$, to szereg jest rozbieżny. Liczbę
$$R = \frac{1}{q} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$
nazywamy *promieniem zbieżności* szeregu. Przyjmujemy, że gdy $q = 0$, to $R = \infty$, a gdy $q = \infty$, to $R = 0$.
Zamiast kryterium ilorazowego można zastosować kryterium pierwiastkowe. Wtedy $q = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$, więc
$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$
Zauważmy też, że dla szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ otrzymujemy podobne wnioski. Zatem wykazaliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8. (o obszarze zbieżności szeregu potęgowego) *Jeśli R jest liczbą wyznaczoną ze wzoru*
$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \tag{4}$$
lub ze wzoru
$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{5}$$
to szereg (3) jest zbieżny w przedziale (x_0-R, x_0+R) i rozbieżny w przedziałach $(-\infty, x_0-R)$, (x_0+R, ∞). W punktach x_0-R, x_0+R szereg może być zbieżny lub nie.

Liczbę R nazywamy *promieniem zbieżności* szeregu, a przedział w którym szereg jest zbieżny *przedziałem zbieżności.*
Przykłady. Zbadać zbieżność szeregów:
1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$.
Obliczamy
$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n3^n}}{\frac{1}{(n+1)3^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^{n+1}}{n3^n} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 3,$$
Zatem szereg jest na pewno zbieżny w $(-3,3)$. Dla $x = 3$ otrzymujemy szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, który jest rozbieżny, a dla $x = -3$ szereg anharmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, warunkowo zbieżny. Ostatecznie przedziałem zbieżności jest $[-3,3)$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$.
Po podobnej (jak wyżej) analizie otrzymamy przedział zbieżności $[-1,1)$.
W następnym przykładzie ograniczymy się do promienia zbieżności.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$. Tutaj

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2[2(n+1)]!}{(2n)![(n+1)!]^2} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+2}{n+1} = 4. \end{aligned}$$

2.2. Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy

Dla danego szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ możemy określić funkcję f, której dziedziną jest przedział zbieżności szeregu a wartościami są sumy odpowiednich szeregów. A zatem dla każdego x z tego przedziału:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

W tej sytuacji mówimy, że funkcja f ma *rozwinięcie w szereg potęgowy.*
Przykład. Dla szeregu geometrycznego $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ i $x \in (-1,1)$ mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Zatem funkcja $\frac{1}{1-x}$ ma w przedziale $(-1,1)$ rozwinięcie w szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
Rozwinięcie w szereg potęgowy daje możliwość obliczania wartości funkcji. Jeśli chcemy wyznaczyć $f(c)$ dla c należącego do przedziału zbieżności, to można to zrobić obliczając lub aproksymując sumę szeregu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n = a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots + a_n c^n + \cdots$$

Rozwinięcie w szereg umożliwia też rozwiązywanie problemów z różniczkowaniem bądź całkowaniem funkcji, ponieważ funkcja zdefiniowana szeregiem ma własności podobne do własności wielomianu. W szczególności można wykazać, że pochodną szeregu można obliczać różniczkując wyraz po wyrazie. Podobna uwaga dotyczy całki. Dokładniej, mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 9. *Załóżmy, że $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ma niezerowy promień zbieżności R i niech funkcja f będzie określona wzorem*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

dla każdego x z przedziału zbieżności. Jeśli $-R < x < R$, to
(i) $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} =$
$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$
(ii) $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\,dt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} =$
$= a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_3}{3} x^3 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \cdots$.

Podstawowym zagadnieniem jest przedstawienie danej funkcji w postaci szeregu potęgowego.

Definicja 5. *Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie x_0 pochodne dowolnego rzędu. Można wtedy utworzyć szereg*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots,$$

który nazywamy szeregiem Taylora *funkcji f o środku w punkcie x_0.*
Jeżeli $x_0 = 0$, to ten szereg nazywamy szeregiem Maclaurina *funkcji f.*

Zatem pod warunkiem, że funkcja ma wszystkie pochodne można utworzyć pewien szereg z nią związany. Ale:
— szereg nie musi być zbieżny w całej dziedzinie tej funkcji;
— nawet jeśli jest zbieżny, to jego suma nie musi być równa tej funkcji.
Potrzebne są dodatkowe założenia.

Twierdzenie 10. (o rozwijaniu funkcji w szereg Taylora) *Jeżeli*

1. *funkcja f ma na otoczeniu U punktu x_0 pochodne dowolnego rzędu;*
2. *dla każdego $x \in U$ reszta wzoru Taylora dąży do 0, tj.*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n = 0,$$

to

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

dla każdego $x \in U$.

Przykład. Posługując się powyższym wzorem wykazać, że dla $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \tag{6}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{7}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{8}$$

Posługując się już wyprowadzonymi rozwinięciami można znaleźć dalsze wykonując operacje na szeregach (dodawanie, mnożenie przez stałą, całkowanie, różniczkowanie ...)
Przykład. Wykorzystując równości

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

wykazać, że dla $x \in \mathbb{R}$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{9}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots . \tag{10}$$

Przykład. Już ze szkoły znana jest równość

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{dla } x \in (-1,1) \tag{11}$$

(szereg geometryczny). Zamieniając w niej x na $-x$ otrzymamy

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{dla } x \in (-1,1).$$

Całkujemy od 0 do x:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

dla $x \in (-1, 1)$.
Przykład. Z równości (11) otrzymujemy np.

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n$$

dla $\left|\frac{x}{2}\right| \leqslant 1$, tj dla $|x| \leqslant 2$.
Ogólniej, gdy szukamy rozwinięcia w szereg danej funkcji wymiernej, to należy zacząć od przedstawienia jej w postaci sumy ułamków prostych.
Przykład. Rozwinąć w szereg funkcję $f(x) = \frac{-x+12}{x^2+x-6}$.

$$\frac{-x+12}{x^2+x-6} = \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+3}.$$

Teraz każdy ułamek rozwijamy w szereg:

$$\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+3} = \frac{-1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) x^n.$$

Otrzymany szereg jest zbieżny, gdy $\left|\frac{x}{2}\right| \leqslant 1$ oraz $\left|\frac{x}{3}\right| \leqslant 1$, tj. dla $|x| \leqslant 2$ i $|x| \leqslant 3$. Ostatecznie więc $|x| \leqslant 2$.
Szereg geometryczny jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego *szeregu dwumianowego*:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{dla } \alpha \in \mathbb{R},\ x \in (-1, 1)$$

gdzie symbol $\binom{\alpha}{n}$ określamy następująco:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Przykładowo dla $\alpha = \frac{1}{3}$ mamy:

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{2!3^2}x^2 + \frac{2 \cdot 5}{3!3^3} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{4!3^4} + \cdots$$

2.3. Zastosowania szeregów potęgowych

Znając rozkład funkcji w szereg Maclaurina można z dowolną dokładnością obliczyć wartości tej funkcji.
Przykład. Obliczyć $\sqrt[10]{e} = e^{\frac{1}{10}}$ z dokładnością $0,00001$.

$$e^{\frac{1}{10}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,01}{2!} + \frac{0,001}{3!} + \frac{0,0001}{4!} + \cdots$$

Jeżeli dodamy pierwszych k wyrazów tego szeregu, to na mocy twierdzenia 10 reszta szeregu jest postaci

$$\frac{10^{-k}}{k!} e^{\vartheta}, \quad 0 < \vartheta < 0{,}1$$

Żądaną dokładność uzyskamy, gdy reszta będzie mniejsza od $0,00001$. Wystarczy $k = 4$.
Uwaga. Z twierdzenia 10 możemy korzystać, gdy znamy wzór na n-tą pochodną. Jeśli tego wzoru nie znamy, to trzeba szacować inaczej. W ostatnim przykładzie przybliżając $e^{\frac{1}{10}}$ k wyrazami odrzucamy wyrazy:

$$R = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{10^k k!} + \frac{1}{10^{k+1}(k+1)!} + \frac{1}{10^{k+2}(k+2)!} + \cdots$$

Szacujemy:

$$R \leqslant \frac{1}{10^k k!}\big(1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \cdots\big) = \frac{1}{10^k k!} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{10^{k-1} \cdot 9k!}.$$

Dla $k = 4$ wynosi to $\frac{1}{10^3 \cdot 9 \cdot 4!} < \frac{1}{10^3 \cdot 10^2} = 10^{-5}$.
Przy obliczaniu wartości ważne jest, jakiego szeregu użyjemy do obliczeń.
Przykład. Obliczyć $\ln 2$.
Punktem wyjścia jest szereg

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \cdots$$

dla $x \in (-1, 1]$. Podstawiając w nim $x = 1$ otrzymamy

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots.$$

Szereg ten jest bardzo wolno zbieżny. Jest to bowiem szereg naprzemienny, dla którego łatwo można uzasadnić nastepującą własność.

Lemat 1. *Niech* $S_k = \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n-1} a_n$ *oznacza przybliżoną wartość szeregu naprzemiennego* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$*, gdzie* $a_n \geqslant 0$*. Wtedy* $|S - S_k| < a_{k+1}$*.*

Krótko: błąd jaki popełniamy biorąc k wyrazów jest mniejszy od modułu $(k+1)$-szego wyrazu.
Np. biorąc 10 wyrazów popełniamy błąd szacowany liczbą $\frac{1}{11}$.
Znajdziemy szereg znacznie szybciej zbieżny. W tym celu wykorzystamy szereg

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \cdots$$

dla $x \in [-1, 1)$. Odejmując szeregi dla $\ln(1+x)$ i $\ln(1-x)$ otrzymamy

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\Big(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\Big).$$

Ponieważ $\frac{1+x}{1-x} = 2$ dla $x = \frac{1}{3}$, więc podstawiając do powyższej równości $x = \frac{1}{3}$ uzyskamy

$$\ln 2 = 2\Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \cdots\Big).$$

Błąd jaki popełnimy biorąc k wyrazów wynosi

$$\frac{2}{(2k+1)3^{2k+1}} + \frac{2}{(2k+3)3^{2k+3}} + \frac{2}{(2k+5)3^{2k+5}} + \cdots$$

i jest mniejszy od

$$\frac{2}{(2k+1)3^{2k+1}}\big(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \cdots\big) = \frac{2}{(2k+1)3^{2k+1}} \cdot \frac{9}{8} = \frac{1}{4(2k+1)3^{2k-1}}.$$

Jeśli np. wymagamy, żeby błąd był niewiększy niż 10^{-9}, to należy znaleźć k dla którego będzie

$$4(2k+1)3^{2k-1} \geqslant 10^9.$$

Wystarczy $k = 9$.
Lemat 1 ma dość nieoczekiwane zastosowanie w dowodzie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 11. *Liczba e jest niewymierna.*

Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że e jest wymierna, tzn. $e = \frac{n}{m}$ dla pewnych liczb naturalnych m, n. Wtedy $e^{-1} = \frac{m}{n}$ oraz

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

Przybliżając e^{-1} sumą n pierwszych wyrazów szeregu:

$$e^{-1} \approx 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

popełniamy błąd mniejszy od $\frac{1}{n!}$. Zatem

$$0 < \left| \frac{m}{n} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right| < \frac{1}{n!}.$$

Mnożąc tę nierówność przez $n!$ otrzymujemy

$$0 < |m(n-1)! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \frac{n!}{4!} + \cdots - (-1)^{n-1} n| < 1.$$

Liczba w środku jest na pewno całkowita, a z nierówności wynika, że jest ona między 0 i 1. Oznacza to sprzeczność, bo takiej liczby nie ma. To kończy dowód.

3. Szeregi Fouriera

Szereg postaci

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) &+ (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots = \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \end{aligned} \tag{12}$$

nazywamy *szeregiem trygonometrycznym.*
Każdy wyraz tego szeregu jest funkcją trygonometryczną o okresie 2π. Jeżeli szereg jest zbieżny w przedziale $[-\pi, \pi]$, to jest zbieżny dla wszystkich x i jego suma jest funkcją okresową. Stąd wynika, że rozwinięcie w szereg trygonometryczny mogą mieć tylko funkcje okresowe o okresie 2π.
Stawiamy zatem następujące zadanie. Przypuśmy, że funkcja $f(x)$, o okresie 2π, ma przedstawienie

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{13}$$

Jak wyliczyć współczynniki a_n i b_n?
Zauważmy najpierw, że dla $n \in \mathbb{N}$ jest $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx = 0$ oraz $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = 0$. Zatem całkując równość (13) otrzymamy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx,$$

a więc

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx.$$

Aby obliczyć a_n dla $n > 0$ mnożymy najpierw równość (13) zapisaną w postaci

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

przez $\cos nx$ i potem całkujemy:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx &= \frac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,dx\right).\end{aligned}$$

Ale całki $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx$ są równe 0 dla $k\neq n$. Żeby to stwierdzić, wystarczy skorzystać ze wzoru trygonometrycznego

$$\cos kx\cos nx = \frac{1}{2}(\cos(k+n)x + \cos(k-n)x).$$

Również $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,dx$ są równe 0 dla $k\in\mathbb{N}$. Tym razem korzystamy ze wzoru trygonometrycznego

$$\sin kx\cos nx = \frac{1}{2}(\sin(k+n)x + \sin(k-n)x).$$

A zatem jedyną niezerową całką po prawej stronie jest $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = \pi$. Zatem mamy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = \pi a_n,$$

skąd otrzymujemy

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Analogicznie znajdziemy wzór na b_n; należy pomnożyć równość (13) przez $\sin nx$ i całkować, korzystając przy tym ze wzoru $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,dx = 0$ dla $k\neq n$. Tę zależność otrzymamy wykorzystując równość

$$\sin kx\sin nx = \frac{1}{2}(\cos(k-n)x - \cos(k+n)x).$$

Po rachunkach podobnych do poprzednich uzyskamy:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Otrzymane wzory

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.\\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.\end{aligned}$$

nazywamy *wzorami Eulera-Fouriera.*
Stosując te wzory można dla dowolnej funkcji całkowalnej w przedziale $[-\pi,\pi]$ utworzyć szereg trygonometryczny nazywany *szeregiem Fouriera* funkcji $f(x)$. Ale ten szereg nie musi być wcale zbieżny! A jeśli nawet jest zbieżny, to niekoniecznie do funkcji $f(x)$. Żeby to zapewnić potrzebne są dodatkowe założenia.

Definicja 6. *Mówimy, że funkcja $f(x)$ spełnia* warunki Dirichleta*, gdy*

1. *$f(x)$ jest przedziałami monotoniczna w $[-\pi,\pi]$;*
2. *$f(x) = \frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$ dla $x\in(-\pi,\pi)$;*
3. *$f(-\pi) = f(\pi) = \frac{1}{2}(f(-\pi+0)+f(\pi-0))$.*

Symbole $f(x-0)$ i $f(x+0)$ oznaczają granicę lewostronną i prawostronną w punkcie x.

Twierdzenie 12. (Dirichleta) *Jeżeli funkcja $f(x)$ spełnia warunki Dirichleta, to jej szereg Fouriera jest zbieżny do funkcji $f(x)$ w przedziale $[-\pi, \pi]$.*

Poza tym przedziałem równość zachodzi jedynie wtedy, gdy funkcja $f(x)$ jest okresowa o okresie 2π.

Przykłady

1. Znajdziemy szereg Fouriera funkcji $f(x) = |x|$. Obliczamy

$$a_0 = \pi, \quad a_n = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1], \quad b_n = 0.$$

Zatem

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{1}{2}\pi + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[(-1)^n - 1]\cos nx = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x \end{aligned}$$

dla $x \in [-\pi, \pi]$.

2. Dla funkcji $f(x) = x\cos x$ obliczamy

$$a_0 = 0 \quad a_n = 0, \quad b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_n = \frac{2n}{n^2 - 1}(-1)^n \text{ dla } n > 1.$$

A więc

$$x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n}{n^2-1}(-1)^n \sin nx$$

dla $x \in (-\pi, \pi)$. Równość zachodzi tylko w przedziale otwartym, bo trzeci warunek Dirichleta nie jest spełniony.

3. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad -\pi < x < 0 \\ x & \text{dla} \quad 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$$

Szereg Fouriera tej funkcji:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + (-1)^n\frac{\sin nx}{n}\right].$$