Maciej Grzesiak
Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej

Krzywe

1. Krzywe stożkowe

1.1. Okrąg

Niech w przestrzeni dane będą dwie proste l i l_1, przecinające się w punkcie W. Jeżeli prosta l_1 będzie obracać się dokoła prostej l, to zakreśli powierzchnię w przestrzeni zwaną *powierzchnią stożkową* lub po prostu *stożkiem*. Prostą l nazywamy *osią stożka*, prostą l_1 — *tworzącą stożka*, a punkt W — *wierzchołkiem stożka*.
Stożkowymi nazywamy krzywe, jakie można otrzymać przecinając stożek płaszczyznami nieprzechodzącymi przez wierzchołek. W zależności od kąta jaki tworzy oś stożka z płaszczyzną tnącą uzyskamy okrąg, elipsę, parabolę lub hiperbolę.
Powyższe określenie jest poglądowe. Podamy teraz inne definicje tych krzywych.
Ponieważ krzywe te są płaskie będziemy traktować je jako podzbiory płaszczyzny Oxy.

Definicja 1. Okręgiem *o środku S i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów P spełniających warunek:*

$$|SP| = r,$$

tj. odległych od środka o r.

Jeżeli $S = (a, b)$, $P = (x, y)$, to obliczając $|SP|$ otrzymamy równanie:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \tag{1}$$

Wykonując działania w równaniu (1) i podstawiając $c = a^2 + b^2 - r^2$ otrzymamy

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0. \tag{2}$$

Przykład. Wyznaczyć środek i promień okręgu $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 15 = 0$.
Rozwiązanie. Z równania mamy $a = 6$, $b = -2$, $c = 15$. Stąd $r^2 = 6^2 + (-2)^2 - 15 = 25$. Zatem $S = (6, -2)$, $r = 5$.
Przykład. Znaleźć zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od początku układu jest dwa razy większa niż odległość od punktu $A = (3, 3)$.
Rozwiązanie. Każdy punkt $P = (x, y)$ tego zbioru spełnia warunek $|OP| = 2|AP|$, czyli

$$\begin{gathered}
\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} \\
x^2 + y^2 = 4\big((x-3)^2 + (y-3)^2\big), \\
3x^2 + 3y^2 - 24x - 24y + 72 = 0, \\
x^2 + y^2 - 8x - 8y + 24 = 0, \\
(x-4)^2 + (y-4)^2 = 8
\end{gathered}$$

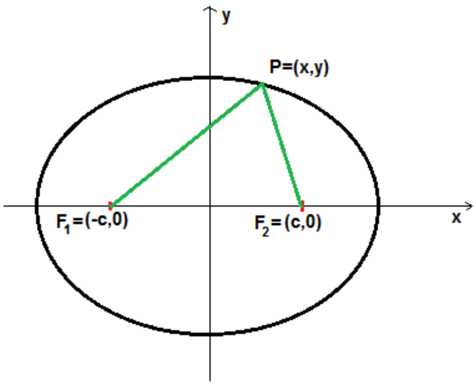
Szukany zbiór to okrąg o środku $(4, 4)$ i promieniu $2\sqrt{2}$.

1.2. Elipsa

Definicja 2. Elipsą *nazywamy zbiór wszystkich punktów P spełniających warunek:*

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a, \tag{3}$$

gdzie F_1 i F_2 są ustalonymi punktami (nazywanymi ogniskami elipsy*), $a > 0$ jest stałą.*



Rysunek 1. Elipsa

Wybierzmy tak układ współrzędnych by ogniska leżały na osi Ox symetrycznie względem O, tj. $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ dla pewnego $c > 0$. Obliczając $|PF_1|$ i $|PF_2|$ i podstawiając do warunku (3) otrzymamy równanie:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{4}$$

Stąd

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Podnosząc obustronnie do kwadratu i wykonując działania otrzymamy

$$2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2xc,$$

$$xc - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Ponownie podnosimy obustronnie do kwadratu:

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2,$$

$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2.$$

Oznaczmy $a^2 - c^2 = b^2$. Wtedy:

$$a^2b^2 = x^2b^2 + a^2y^2.$$

Po podzieleniu przez a^2b^2 i zamianie stron otrzymujemy równanie elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

Liczby a i b występujące w równaniu mają prostą interpretację. Jeśli w (5) podstawimy $y = 0$, to otrzymamy $x = \pm a$, a więc elipsa przecina oś Ox w punktach $(-a, 0)$ i $(a, 0)$. Analogicznie, dla $x = 0$ jest $y = \pm b$, więc elipsa przecina oś Oy w punktach $(0, -b)$ i $(0, b)$. Liczby $2a$ i $2b$ nazywamy odpowiednio *osią wielką* i *osią małą* elipsy. Natomiast $2c$ nazywamy *ogniskową* elipsy.

Definicja 3. *Liczbę* $e = c/a$ *nazywamy* mimośrodem *elipsy.*

Ponieważ $0 < c < a$, więc $0 < e < 1$. Mimośród charakteryzuje "spłaszczenie" elipsy: gdy jest bliski 0, to elipsa jest "prawie" okręgiem. Im jest większy, tym elipsa jest bardziej spłaszczona.
Przykład. Jak wiadomo, planety poruszają się po elipsach. Słońce znajduje się zawsze w jednym z ognisk elipsy. Dla Ziemi półoś wielka a wynosi $150 \cdot 10^6$ km, a $c = 2,55 \cdot 10^6$ km. Zatem mimośród wynosi 0,017. Jest to więc elipsa bliska okręgowi.
Zadanie. Szklanka w kształcie walca o wewnętrznej średnicy $d = 10$ cm i głębokości $h = 12$ cm jest napełniona do połowy wodą. Jeśli szklankę przechylamy tak, by woda osiągnęła krawędź, to powierzchnia wody będzie ograniczona elipsą. Znaleźć półosie tej elipsy.
Odp. $a = 7,8$ cm, $b = 5$ cm.
Zadanie. Naszkicować wykres krzywej określonej równaniem

$$16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0.$$

Rozwiązanie.

$$16(x^2 + 4x) + 9(y^2 - 2y) = 71$$
$$16(x + 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 71 + 64 + 9 = 144$$
$$\frac{(x + 2)^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{16} = 1.$$

Krzywa jest elipsą o półosiach $a = 3$, $b = 4$ i środku w punkcie $(-2, 1)$.
Zadanie. Wykazać, że promienie wodzące punktu $P(x, y)$ na elipsie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ wyrażają się wzorami:

$$r_1 = a + ex, \quad r_2 = a - ex,$$

gdzie e to mimośród.
Rozwiązanie. Mamy $r_1 + r_2 = 2a$ oraz $r_1^2 = (x + c)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x - c)^2 + y^2$. Odejmując stronami dwie ostatnie równości otrzymamy $r_1^2 - r_2^2 = 4xc$. Dzieląc stronami to równanie przez równanie pierwsze otrzymamy $r_1 - r_2 = 2xe$. Z układu

$$r_1 + r_2 = 2a, \; r_1 - r_2 = 2xe$$

łatwo obliczamy r_1, r_2.
Przyrodnicy i fizycy często powołują się (nieformalnie) na tzw. zasadę minimalności. Np. "promień świetlny szuka takiej drogi, która jest najkrótsza". W tym kontekście rozważmy zadanie: w którym punkcie elipsy należy przystawić lustro, aby promień świetlny wychodzący z jednego ogniska trafił do drugiego?
Z zasady minimalności wynika, że powinien to być taki punkt, że droga (suma promieni wodzących) będzie najkrótsza. Ale dla punktów na elipsie wszystkie takie drogi są jednakowe, bo $r_1 + r_2 = 2a$. Punkt jest więc dowolny. Uwzględniając znany fakt, że kąt padania jest równy kątowi odbicia, matematycznie oznacza to następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Styczna do elipsy w punkcie P tworzy z promieniami wodzącymi punktu P równe kąty.*

Formalny dowód tego twierdzenia można podać rozwiązując po kolei poniższe zadania.
Z1. Obliczyć współczynnik kierunkowy m stycznej do elipsy w punkcie $(x_0, y_0) \notin Ox$.
Rozwiązanie. Elipsę można traktować jako sumę wykresów funkcji

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \qquad y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Obliczając pochodną otrzymamy

$$m = y'(x_0) = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Uwaga. Najszybciej obliczymy m różniczkując względem x równość $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Otrzymamy:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0,$$

skąd łatwo wyliczymy y'.

Z2. Wykazać, że jeśli (x_0, y_0) jest punktem elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, to prosta $\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=1$ jest styczną do tej elipsy w punkcie (x_0, y_0).

Rozwiązanie. Dla punktów $(a, 0)$ oraz $(-a, 0)$ zadanie jest łatwe. Jeśli $(x_0, y_o) \notin Ox$, to z poprzedniego zadania:

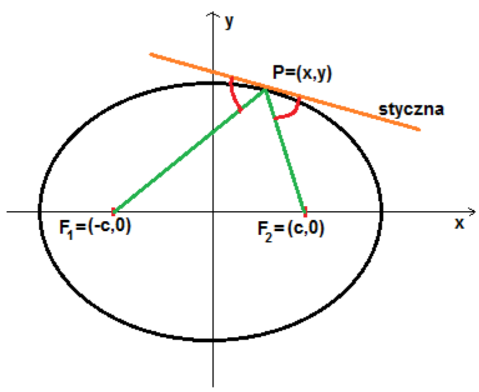
$$y-y_0=-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x-x_0)$$

czyli

$$\begin{aligned} a^2 y_0 y - a^2 y_0^2 &= -b^2 x_0 x + b^2 x_0^2, \\ b^2 x_0 x + a^2 y_0 y &= b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2. \end{aligned}$$

Dzieląc przez $a^2 b^2$ dostaniemy

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$$



Rysunek 2. Styczna tworzy z promieniami równe kąty

Z3. Obliczyć cosinusy kątów między wektorem $\overrightarrow{n}=[\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}]$ a wektorami $\overrightarrow{F_1P}=[x_0+c, y_0]$ oraz $\overrightarrow{F_2P}=[x_0-c, y_0]$.

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru

$$\cos\varphi=\frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Mamy

$$\cos\varphi_1=\frac{\frac{x_0^2+x_0c}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}{|\vec{n}|\cdot r_1}=\frac{1+\frac{x_0 c}{a^2}}{|\vec{n}|\cdot r_1}=\frac{a^2+x_0 c}{a^2|\vec{n}|\cdot r_1}=\frac{1}{a^2|\vec{n}|}.$$

oraz

$$\cos\varphi_2=\frac{\frac{x_0^2-x_0c}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}{|\vec{n}|\cdot r_2}=\frac{1-\frac{x_0 c}{a^2}}{|\vec{n}|\cdot r_2}=\frac{a^2-x_0 c}{a^2|\vec{n}|\cdot r_2}=\frac{1}{a^2|\vec{n}|}.$$

Zatem $\cos\varphi_1=\cos\varphi_2$. $\square$

1.3. Hiperbola

Definicja 4. Hiperbolą *nazywamy zbiór wszystkich punktów P spełniających warunek:*

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a,$$

gdzie F_1 i F_2 są ustalonymi punktami (nazywanymi ogniskami hiperboli), $a > 0$ jest stałą.

Podobnie jak dla elipsy, wybierzmy tak układ współrzędnych by ogniska leżały na osi Ox symetrycznie względem O, tj. $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ dla pewnego $c > 0$. Obliczając $|PF_1|, |PF_2|$ otrzymamy równanie:

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a. \tag{6}$$

Po rachunkach przeprowadzanych analogicznie jak dla elipsy i oznaczeniu $c^2 - a^2 = b^2$ otrzymujemy równanie hiperboli:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7}$$

Jeśli w (7) podstawimy $y = 0$, to otrzymamy $x = \pm a$, a więc hiperbola przecina oś Ox w punktach $(-a, 0)$ i $(a, 0)$. Te punkty nazywamy *wierzchołkami* hiperboli.
Ale dla $x = 0$ otrzymujemy równanie sprzeczne $-\frac{y^2}{b^2} = 1$. Zatem współczynnik b nie ma interpretacji geometrycznej.
Liczby $2a$ i $2b$ nazywamy odpowiednio *osią rzeczywistą* i *osią urojoną* hiperboli. Natomiast $2c$ nazywamy *ogniskową* hiperboli.

Definicja 5. *Liczbę $e = c/a$ nazywamy* mimośrodem *hiperboli.*

Ponieważ teraz $0 < a < c$, więc $e > 1$.

Definicja 6. *Hiperbolę*

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{8}$$

nazywamy hiperbolą sprzężoną *z hiperbolą (7).*

Wierzchołki i ogniska hiperboli (8) leżą na osi Oy.
Wyliczając współczynniki kierunkowe stycznych do wykresów funkcji $y = \pm b\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}$ i korzystając z równania stycznej do wykresu funkcji można dość łatwo wykazać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. *Proste*

$$y = \pm\frac{b}{a}x \tag{9}$$

są asymptotami hiperboli (7) i (8).

Przykład. Dana jest hiperbola $x^2 - y^2 = 8$. Napisać równanie hiperboli współogniskowej przechodzącej przez punkt $A(-5, 3)$.
Odp. $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$.
Przykład. Napisać równania stycznych do hiperboli $4x^2 - y^2 = 4$ poprowadzonych z punktu $A(1, 4)$.
Odp. $x = 1$, $5x - 2y + 3 = 0$.
Przykład. Czy dla hiperboli prawdziwe jest zdanie: hiperbola składa się z punktów, dla których iloczyn odległości od asymptot jest stały?
Odp. Tak, dla hiperboli (7) wynosi on $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

1.4. Parabola

Definicja 7. Parabolą *nazywamy zbiór wszystkich punktów P spełniających warunek:*

$$|PF| = d(P, l)$$

gdzie F jest ustalonym punktem (nazywanym ogniskiem *paraboli), a l jest ustaloną prostą (*kierownicą *paraboli).*

Wybierzmy tak układ współrzędnych by ognisko leżało na osi Ox, kierownica była równoległa do osi Oy a początek układu O był w środku między nimi. Przyjmijmy, że ognisko F ma współrzędne $(p/2, 0)$, a kierownica ma równanie $x = -p/2$. Dowolny punkt $P(x, y)$ paraboli spełnia równanie:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = |x + \frac{p}{2}|$$

Po podniesieniu do kwadratu i dokonaniu redukcji otrzymamy równanie paraboli w postaci

$$y^2 = 2px. \tag{10}$$

Współczynnik p nazywamy parametrem paraboli.
Przy powyższych założeniach parabola przechodzi przez punkt $(0, 0)$ (który nazywamy *wierzchołkiem*) i osią symetrii wykresu jest oś Ox. Nieco ogólniejsze równanie

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \tag{11}$$

przedstawia parabolę o osi poziomej i wierzchołku w punkcie (x_0, y_0).
Gdybyśmy tę parabolę obrócili o kąt $\frac{\pi}{2}$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to będzie ona miała równanie

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0),$$

które po wykonaniu działań można sprowadzić do postaci

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Jest to postać znana ze szkoły średniej. Wierzchołek takiej paraboli ma współrzędne

$$x_w = -\frac{b}{2a},\ y_w = -\frac{\Delta}{4a}, \quad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Przykład. Napisać równanie paraboli, mając dane ognisko $F(2, -1)$ i równanie kierownicy $x - y - 1 = 0$.
Rozwiązanie. Jeśli $P = (x, y)$ leży na paraboli, to

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = |PF| = d(P, l) = \frac{|x - y - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{(x - y - 1)^2}{2}$$

$$x^2 + y^2 + 2xy - 6x + 2y + 1 = 0$$

Przykład. Ustalić warunek, przy którym prosta $y = mx + b$ jest styczna do paraboli $y^2 = 2px$.
Rozwiązanie. Równanie $(mx + b)^2 = 2px$, czyli

$$m^2x^2 + 2(mb - p)x + b^2 = 0,$$

musi mieć jedno rozwiązanie. Zatem $\Delta = -4p(2mb - p) = 0$, więc $mb = p/2$.
Odp.: Warunek styczności to $mb = p/2$.
Przykład. Udowodnić, że styczne do paraboli $y^2 = 2px$ poprowadzone z dowolnego punktu kierownicy są wzajemnie prostopadłe.

Rozwiązanie. Równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (-\frac{p}{2}, y_0)$ jest postaci

$$y = mx + \frac{mp + 2y_0}{2}.$$

Jeśli jest ona styczna do paraboli, to z poprzedniego przykładu wiemy, że musi być

$$m\frac{mp + 2y_0}{2} = \frac{p}{2}$$

czyli

$$pm^2 + 2y_0 m - p = 0.$$

Ze wzoróww Viete'a: $m_1 m_2 = -\frac{p}{p} = -1$, a zatem proste są prostopadłe. $\square$

2. Krzywe na płaszczyźnie

Wykres funkcji ciągłej $f(x)$ nazywamy krzywą na płaszczyźnie. Ale ta definicja nie obejmuje większości krzywych stożkowych, a nawet prostych równoległych do osi Oy. Podamy więc ogólniejszą definicję, która wystarczy do większości zastosowań.

Definicja 8. *Krzywą na płaszczyźnie* nazywamy zbiór K punktów postaci $(f(t), g(t))$, gdzie f i g są funkcjami ciągłymi na pewnym przedziale I.
Równania

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad t \in I \tag{12}$$

nazywamy *równaniami parametrycznymi* krzywej K.

Przykład. Naszkicować wykres krzywej

$$x = 2t, \quad y = t^2 - 1, \quad -2 \leqslant t \leqslant 1.$$

I sposób. Sporządzamy tabelę

t	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	3	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	0

II sposób. Obliczamy $t = \frac{1}{2}x$ i podstawiamy do y. Otrzymujemy $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$. Jest to więc równanie paraboli.
Równania parametryczne nigdy nie są jednoznaczne. Np. powyższa parabola ma także równania

$$x = t, \quad y = \frac{1}{4}t^2 - 1, \quad -4 \leqslant t \leqslant 2,$$

$$x = t^3, \quad y = \frac{1}{4}t^6 - 1, \quad \sqrt[3]{-4} \leqslant t \leqslant \sqrt[3]{2}.$$

Krzywą (12) nazywamy *gładką*, jeśli funkcje f i g mają ciągłe pochodne na przedziale I i te pochodne nie są jednocześnie równe 0 z wyjątkiem być może końców przedziału I. Natomiast jeśli przedział I można podzielić na podprzedziały tak, że na każdym podprzedziale krzywa jest gładka, to krzywą nazywamy *kawałkami gładką*.

Równania parametryczne niektórych krzywych

— Okrąg o środku (a, b) i promieniu r ma równania parametryczne:

$$x = a + r\cos t, \quad y = b + r\sin t, \quad t \in [0, 2\pi).$$

— Elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ma równania parametryczne:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi).$$

— Hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ma równania parametryczne:

$$x = a\cosh t, \quad y = b\sinh t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

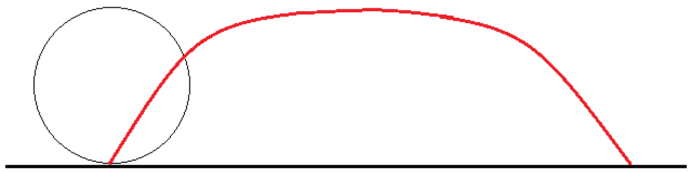
Wykorzystując liczby zespolone możemy równania okręgu zapisać w postaci

$$z = z_0 + r\,\mathrm{e}^{it}, \quad \text{gdzie } z_0 = a + b\,\mathrm{i}\,.$$

Równania parametryczne pojawiają się w naturalny sposób przy opisie ruchu, bo wtedy często można znaleźć zależności współrzędnych x, y od czasu t. W geometrii mamy całą rodzinę krzywych powstałych w wyniku ruchu.

Definicja 9. *Ruletą* nazywamy linię, jaką zakreśla ustalony punkt na jednej krzywej toczącej się bez poślizgu po drugiej krzywej (zwanej *kierownicą*), przy czym obie te krzywe leżą w jednej płaszczyźnie.

Jeśli okrąg toczy się bez poślizgu po linii prostej, to ustalony punkt okręgu zakreśla krzywą, którą nazywamy *cykloidą* Jeżeli okrąg ma promień a, a t oznacza kąt obrotu, to równania



Rysunek 3. Cykloida

parametryczne mają postać

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

Cykloida ma ważne własności.

Definicja 10. Krzywą, po której czas staczania się masy punktowej od punktu A do punktu B pod wpływem stałej siły (siły ciężkości) jest najkrótszy, nazywamy *brachistochroną*.

Definicja 11. Krzywą, po której czas staczania się masy punktowej pod wpływem stałej siły ciężkości do najniższego jej punktu jest taki sam, niezależnie od punktu startowego na tej krzywej, nazywamy *tautochroną* lub *izochroną*.

Cykloida jest jednocześnie brachistochroną i tautochroną. Ta druga własność umożliwiła skonstruowanie zegara z wahadłem izochronicznym.
W żegludze podstawowym problemem było i jest ustalanie położenia. Szerokość geograficzną obliczano ustalając wysokość Słońca nad horyzontem lub (na półkuli północnej) mierząc pozycję Gwiazdy Polarnej.

Natomiast obliczenie długości geograficznej wymagało znajomości czasu lokalnego i czasu odniesienia, bo różnica tych czasów określa długość kątową między miejscem aktualnym, a miejscem odniesienia. Wymagało to dokładnych zegarów. Christian Huygens (1629 - 1695) dzięki odkryciu własności tautochrony u cykloidy skonstruował zegar z wahadłem izochronicznym.

Inne ciekawe krzywe otrzymamy, gdy okrąg toczy się po innym okręgu. Toczenie może się odbywać po wewnętrznej albo po zewnętrznej stronie nieruchomego okręgu. W zależności od proporcji promieni obu okręgów otrzymujemy rozmaite krzywe.

— *Epicykloida* jest to krzywa jaką zakreśla ustalony punkt okręgu toczącego się bez poślizgu po zewnętrznej stronie nieruchomego okręgu.
— *Hipocykloida* jest to krzywa jaką zakreśla ustalony punkt okręgu toczącego się bez poślizgu po wewnętrznej stronie nieruchomego okręgu.

Przykładem epicykloidy jest *kardioida*, która powstaje, gdy oba okręgi mają te same promienie.
Natomiast gdy po okręgu nieruchomym toczy się wewnętrznie okrąg o promieniu 4 razy mniejszym, to powstałą hipocykloidę nazywamy *asteroidą*.

3. Układ biegunowy

Układ współrzędnych biegunowych składa się z ustalonego punktu O (*bieguna*) i półosi o początku O (*osi biegunowej*).
Dla dowolnego punktu P różnego od O niech $r = |OP|$, a φ niech będzie miarą kąta skierowanego od osi biegunowej do wektora $\overrightarrow{OP}$. Liczby (r, φ) nazywamy współrzędnymi biegunowymi punktu P.
Ponieważ φ jest kątem skierowanym, więc współrzędne biegunowe danego punktu nie są jednoznaczne. Np. $(3, \frac{\pi}{4})$, $(3, \frac{9\pi}{4})$, $(3, -\frac{7\pi}{4})$, reprezentują ten sam punkt.
Przyjmujemy także, że biegun ma współrzędne $(0, \varphi)$ dla dowolnego φ.
Przykład. Naszkicujemy wykres funkcji $r = 2 + 2\cos\varphi$.
Sporządzamy tabelę

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r	4	$2+\sqrt{3}$	$2+\sqrt{2}$	3	2	1	$2-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{3}$

Krzywa o równaniu $r = a(1 + \cos\varphi)$ nazywa się *kardioidą*.
Jeżeli na płaszczyźnie mamy jednocześnie układ biegunowy i kartezjański Oxy, przy czym dodatnia półoś x pokrywa się z osią biegunową, to mamy związki:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Przykład. Jakie równanie kartezjańskie ma krzywa $r = 4\sin\varphi$?
Mnożąc obustronnie przez r dostajemy $r^2 = 4r\sin\varphi$, a więc $x^2 + y^2 = 4y$, czyli

$$x^2 + (y-2)^2 = 4.$$

Jest to okrąg.
Przykład. Jakie równanie biegunowe ma krzywa $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ $(a > 0)$?
Mamy

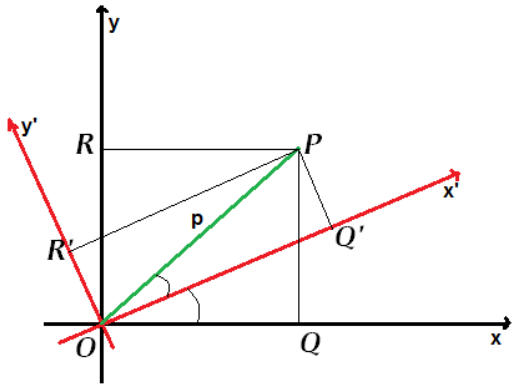
$$(r^2)^2 = a^2((r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2)$$
$$r^4 = a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$
$$r^2 = a^2\cos 2\varphi$$

Ta krzywa nazywa się *lemniskatą Bernoullego*.
Zadanie. Naszkicować wykresy krzywych $(a > 0)$:
1. $r = a\varphi$ (spirala Archimedesa)
2. $r = \frac{a}{\varphi}$ (spirala hiperboliczna)
3. $r = e^{a\varphi}$ (spirala logarytmiczna)

Uwaga: w punkcie 2 uwzględnić, że $r\sin\varphi = a\frac{\sin\varphi}{\varphi}$, a więc $\lim_{\varphi\to 0} y = a$.
Spirala Archimedesa jest trajektorią punktu, który przemieszcza się jednostajnie po prostej, podczas gdy prosta obraca sie jednostajnie wokół jednego ze swoich punktów. Jest to krzywa rowka na płytach winylowych.
Spirala logarytmiczna (*spira mirabilis*) pojawia się w przyrodzie, np. muszla łodzika (gatunek mięczaka) ma jej kształt. Na życzenie Jacoba Bornoullego (1654 - 1705), który ją badał, spiralę umieszczono na jego nagrobku w Bazylei.

4. Obrót układu współrzędnych

Zadanie. Układ Oxy został obrócony dokoła punktu O o kąt φ. Punkt $P = (x, y)$ ma w nowym układzie współrzędne (x', y'). Znaleźć wzory wyrażające stare współrzędne (x, y) w zależności od nowych (x', y').



Rysunek 4. Obrót układu współrzędnych

Niech $|OP| = p$ oraz θ kąt jaki wektor $\overrightarrow{OP}$ tworzy z osią Ox'. Wtedy

$$x' = p\cos\theta \qquad\qquad y' = \sin\theta$$
$$x = p\cos(\theta+\varphi) \qquad\qquad y = \sin(\theta+\varphi)$$

Wykorzystując wzory na cosinus i sinus sumy dostajemy;

$$x = p\cos\theta\cos\varphi - p\sin\theta\sin\varphi = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$$

$$y = p\sin\theta\cos\varphi + p\cos\theta\sin\varphi = y'\cos\varphi + x'\sin\varphi = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$

W zapisie macierzowym:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Przykład. W układzie Oxy dana jest krzywa o równaniu $xy = 1$. Jakie będzie miała równanie, jeśli układ obrócimy o kąt $\frac{\pi}{4}$?
Rozwiązanie. Mamy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},$$

a więc

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

Podstawiamy do równania:

$$\frac{1}{2}(x' - y')(x' + y') = 1$$
$$\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) = 1$$
$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1.$$