Maciej Grzesiak
Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej

Płaszczyzna i prosta w przestrzeni

1. Płaszczyzna w przestrzeni

Położenie płaszczyzny jest określone jednoznacznie, gdy znany jest jeden jej punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i wektor $\vec{n} = [A, B, C]$ prostopadły do płaszczyzny. Wtedy, jeżeli $P = (x, y, z)$ jest dowolnym punktem płaszczyzny, to wektor $\overrightarrow{P_0P}$ leży w tej płaszczyźnie, a więc jest prostopadły do wektora $\vec{n}$ i z warunku prostopadłości otrzymujemy

$$\overrightarrow{P_0P} \circ \vec{n} = 0. \tag{1}$$

Ponieważ $\overrightarrow{P_0P} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$, to po obliczeniu iloczynu skalarnego mamy równość:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Wykonując mnożenie i podstawiając $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$ otrzymujemy równanie

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2}$$

które nazywamy *równaniem ogólnym płaszczyzny.*
Warte odnotowania są niektóre szczególne przypadki położenia płaszczyzny w układzie współrzędnych. Jeżeli płaszczyzna:
- przechodzi przez początek układu, to $D = 0$;
- jest równoległa do osi Oz, to $C = 0$;
- jest równoległa do osi Oy, to $B = 0$;
- jest równoległa do osi Ox, to $A = 0$;
- jest prostopadła do osi Oz, to $A = B = 0$, i.t.d.

Jeżeli płaszczyzna nie przechodzi przez początek układu współrzędnych ani nie jest równoległa do żadnej osi układu, to można jej równanie zapisać *w postaci odcinkowej*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

(Aby z równania ogólnego (2) otrzymać odcinkowe wystarczy przenieść D na prawą stronę i podzielić równanie przez $-D$.)
Przykład. Napisać równania (ogólne i odcinkowe) płaszczyzn:
1. przechodzącej przez $P_0 = (1, -2, 3)$ i prostopadłej do $\vec{n} = [2, 3, -2]$;
2. przechodzącej przez $P_0 = (2, -2, 3)$ i równoległej do wektorów $\vec{a} = [2, 3, -1], \vec{b} = [-3, 2, 0]$
3. przechodzącej przez punkty $P_1 = (1, 0, 2), P_2 = (3, -2, 1), P_3 = (0, 4, -3)$.

2. Prosta w przestrzeni

Położenie prostej l jest określone jednoznacznie, gdy znany jest jeden jej punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i wektor $\vec{k} = [a, b, c]$ równoległy do niej (wektor $\vec{k}$ nazywamy *wektorem kierunkowym* prostej l).
Jeżeli teraz $P = (x, y, z)$ jest dowolnym punktem prostej, to wektor $\overrightarrow{P_0P}$ jest równoległy do prostej, a więc jest równoległy do wektora $\vec{k}$ i z warunku równoległości wektorów otrzymujemy

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{k} \quad \text{dla pewnego } t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Podstawiając $\overrightarrow{P_0P} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$, $\vec{k} = [a, b, c]$ otrzymujemy

$$[x - x_0, y - y_0, z - z_0] = [ta, tb, tc]$$

Porównując współrzędne otrzymujemy równości charakteryzujące prostą:

$$l : \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Równania (4) nazywamy *równaniami parametrycznymi prostej.*
Przykład. Równania parametryczne prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (2, -3, 5)$ i równoległej do wektora $\vec{k} = [1, -5, 2]$ mają postać:

$$l : \begin{cases} x &= 2 + t \\ y &= -3 - 5t \\ z &= 5 + 2t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Jeżeli zamiast wektora znany jest drugi punkt prostej $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, to wektorem kierunkowym jest $\overrightarrow{P_0P_1} = [x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0]$.
Przykład. Napisać równania parametryczne prostej l przechodzącej przez punkty $P_0 = (4, -2, -6)$, $P_1 = (2, -2, 3)$.
Wektorem kierunkowym jest tutaj $P_0P_1 = [-2, 0, 9]$, zatem:

$$l : \begin{cases} x &= 4 - 2t \\ y &= -2 \\ z &= -6 + 9t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Uwaga. Zamiast punktu P_0 możemy wziąć punkt P_1. Wtedy równania będą postaci

$$l : \begin{cases} x &= 2 - 2t \\ y &= -2 \\ z &= 3 + 9t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Równania (4) możemy przekształcić do postaci:

$$l : \begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = t \\ \frac{y - y_0}{b} = t \\ \frac{z - z_0}{c} = t \end{cases}, \tag{5}$$

skąd otrzymujemy

$$l : \ \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}. \tag{6}$$

Równanie w tej postaci nazywamy *równaniem kierunkowym prostej* albo *równaniem w postaci podwójnej proporcji.*
Uwaga. W takiej postaci w mianowniku może się pojawić 0 (bo kreska nie jest tu symbolem dzielenia, tylko proporcji). Np. dla prostej l z poprzedniego przykładu równanie kierunkowe ma postać:

$$\frac{x - 4}{-2} = \frac{y + 2}{0} = \frac{z + 6}{9} \quad \text{lub} \quad \frac{x - 2}{-2} = \frac{y + 2}{0} = \frac{z - 3}{9}.$$

Występowanie zera w mianowniku oznacza, że licznik też jest równy 0.
Przykład. Znaleźć punkty, w których prosta

$$\frac{x - 2}{-3} = \frac{y + 1}{4} = \frac{z - 3}{2}$$

przecina płaszczyzny układu współrzędnych.
Rozwiązanie. Aby znaleźć przecięcie z Oyz należy podstawić $x = 0$, skąd

$$\frac{-2}{-3} = \frac{y + 1}{4} = \frac{z - 3}{2},$$

więc $y+1=4\cdot\frac{2}{3}$, $z-3=2\cdot\frac{2}{3}$, czyli $y=\frac{5}{3}$, $z=\frac{13}{3}$. Zatem punktem przecięcia jest $P=(0,\frac{5}{3},\frac{13}{3})$. Analogicznie znajdziemy inne punkty.
W zagadnieniach praktycznych prosta często pojawia się jako część wspólna (krawędź przecięcia) dwóch płaszczyzn nierównoległych. Jeżeli tymi płaszczyznami są

$$\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad \pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

to prostą l zapisujemy w postaci

$$l:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}. \tag{7}$$

Mówimy wtedy, że prosta jest *w postaci krawędziowej.*
Postać krawędziowa nie ujawnia wektora kierunkowego prostej, ale dość łatwo można go obliczyć. Wystarczy zauważyć, że ten wektor musi być prostopadły zarówno do wektora $[A_1,B_1,C_1]$ (prostopadłego do π_1), jak i do wektora $[A_2,B_2,C_2]$ (prostopadłego do π_2). Zatem

$$\vec{k}=[A_1,B_1,C_1]\times[A_2,B_2,C_2].$$

3. Niektóre zagadnienia dotyczące prostych i płaszczyzn

Znajdowanie rzutu punktu na płaszczyznę.

Jeżeli chcemy znaleźć rzut prostopadły punktu $P=(x_0,y_0,z_0)$ na płaszczyznę $\pi:\ Ax+By+Cz+D=0$, to należy napisać równanie prostej przechodzącej przez P i prostopadłej do π (wektor kierunkowy to $[A,B,C]$) i wyliczyć punkt przecięcia prostej z płaszczyzną.
Przykład. Znaleźć rzut punktu $P=(1,2,4)$ na płaszczyznę $x-3y+4z-3=0$.
Rozwiązanie. Prosta prostopadła do płaszczyzny (i przechodząca przez P) ma równanie kierunkowe

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-4}{4}.$$

Do rachunków jednak wygodniejsze są równania parametryczne:

$$x=1+t,\ y=2-3t,\ z=4+4t,$$

bo podstawiając je do równania płaszczyzny obliczymy $t=-\frac{4}{13}$, a potem $x=\frac{9}{13}$, $y=\frac{38}{13}$, $z=\frac{36}{13}$. Zatem rzut $P'=(\frac{9}{13},\frac{38}{13}.\frac{36}{13})$.

Odległość punktu od płaszczyzny

Gdy chcemy znaleźć odległość punktu $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ od płaszczyzny $\pi:\ Ax+By+Cz+D=0$, to wystarczy sobie uświadomić, że ta odległość to długość odcinka P_0P_0', gdzie P_0' jest rzutem prostopadłym punktu P_0 na płaszczyznę. Wykonując rachunki na wzorach ogólnych dojdziemy do wzoru:

$$d(P_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{8}$$

Odległość płaszczyzn równoległych

Jest to odległość dowolnego punktu jednej płaszczyzny od drugiej płaszczyzny.
Przykład. Obliczyć odległość płaszczyzn $2x+5y-z+7=0$, $2x+5y-z+12=0$.
Rozwiązanie. Znajdujemy jakikolwiek punkt pierwszej płaszczyzny; np. przyjmując $x=0,y=0$ obliczamy $z=7$. Następnie korzystając ze wzoru (8) obliczamy odległość punktu $(0,0,7)$ od płaszczyzny $2x+5y-z+12=0$:

$$d=\frac{|-7+12|}{\sqrt{4+25+1}}=\frac{5}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

Znajdowanie rzutu punktu na prostą.

Problem jest podobny do znajdowania rzutu punktu na płaszczyznę. Tym razem szukany punkt P' jest punktem wspólnym danej prostej i płaszczyzny, która przechodzi przez dany punkt P i jest prostopadła do prostej.
Przykład. Wyznaczyć rzut punktu $P = (2, 0, -3)$ na prostą $x = 1+2t,\ y = 2-t,\ z = 1+4t$.
Rozwiązanie. Wektor normalny płaszczyzny odczytujemy z równań prostej: $\vec{n} = [2, -1, 4]$. Stąd równanie płaszczyzny: $2x - y + 4z + 8 = 0$. Dalej podstawiając równania prostej do równania płaszczyzny obliczymy $t = -\frac{4}{7}$ i $P' = (-\frac{8}{7}, \frac{18}{7}, -\frac{9}{7})$.

Obliczanie kątów między płaszczyznami, między prostymi, między prostą i płaszczyzną

Szukany kąt jest zawsze kątem między odpowiednimi wektorami. Należy je znaleźć i skorzystać ze wzoru

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \tag{9}$$

Przykład. Obliczyć kąt między prostymi l_1 i l_2:

$$l_1 : \ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-4}{2}, \quad l_2 : \ \frac{x-3}{4} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-4}{5}.$$

Rozwiązanie. Wektory kierunkowe wynoszą:

$$k_1 = [1, -3, 2], \quad k_2 = [4, 3, 5].$$

Jeżeli φ jest kątem między tymi wektorami, to ze wzoru (9):

$$\cos\varphi = \frac{4 - 9 + 10}{\sqrt{14}\sqrt{50}} = \frac{5}{10\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}.$$

Stąd

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{7}}{14}.$$

Uwaga. Kąt między prostymi w przestrzeni nie jest figurą geometryczną, bo proste wcale nie muszą się przecinać (mogą być skośne).