Maciej Grzesiak
Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej

Elementy logiki

1. Elementy logiki

W logice *zdaniem* nazywamy wypowiedź oznajmującą, która (w ramach danej nauki) jest albo prawdziwa, albo fałszywa. Tak więc zdanie może mieć jedną z dwóch *wartości logicznych*. Prawdziwość oznaczamy cyfrą 1, fałszywość cyfrą 0.
Przykłady. Zdaniami są:

$$\textit{Jeżeli } x \textit{ jest liczbą rzeczywistą, to } x^2 > 0,$$

$$\textit{Jeżeli } x \textit{ jest liczbą rzeczywistą, to } x^2 + 1 > 0,$$

Ziemia obraca się wokół Księżyca,

bo posiadając odpowiednią wiedzę można stwierdzić, czy są prawdziwe, czy fałszywe.
Zdaniami nie są wypowiedzi:

Czy lubisz frytki?,

Daj mi spokój,

x dzieli się przez 3,

bo nie można przypisać im wartości logicznej.
Zdania oznaczamy literami: $p, q, \ldots$.
Z danych zdań można tworzyć zdania złożone za pomocą *spójników logicznych (funktorów zdaniotwórczych)*:

nie, i, lub, implikuje (jeżeli ... to), jest równoważne,

oznaczanych symbolami

$$\sim,\ \wedge,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow .$$

Zdania złożone:

$$\sim p,\ p \wedge q,\ p \vee q,\ p \Rightarrow q,\ p \Leftrightarrow q,$$

nazywamy odpowiednio *negacją* (zdania p), *koniunkcją*, *alternatywą* (zdań p, q), *implikacją* (o *poprzedniku* p i *następniku* q) i *równoważnością* (zdań p, q).
Wartości logiczne zdań złożonych zależą tylko od wartości logicznych zdań prostych. Wyjaśnia to tabela:

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Największe trudności sprawia implikacja. Przeanalizujmy np. sytuację: Staszek powiedział wczoraj: *Jeżeli jutro będzie ładna pogoda, to przyjdę*. Uznamy, że Staszek skłamał jedynie wtedy, gdy dzisiaj jest ładna pogoda, a on nie przyszedł (poprzednik prawdziwy, a następnik fałszywy). W pozostałych przypadkach mówił prawdę (w szczególności również wtedy, gdy przyszedł mimo złej pogody!)
Implikacja ma związek z pojęciem *warunku koniecznego* i *warunku dostatecznego (wystarczającego).* Mianowicie, jeżeli $p \Rightarrow q$, to q jest warunkiem koniecznym dla p (tzn. jeśli nie

zachodzi q, to nie może zachodzić p); jednocześnie, p jest warunkiem dostatecznym dla q (gdy występuje p, to na pewno prawdziwe jest q). Np. zdanie *liczba x jest parzysta* jest warunkiem koniecznym dla zdania *liczba x jest podzielna przez 4*, ale nie jest warunkiem dostatecznym dla tego zdania.
Jeżeli w zapisie nie ma nawiasów między funktorami, to najpierw wykonujemy negację, potem koniunkcję, alternatywę, implikację i równoważność. Oczywiście nawiasy są nadrzędne, tzn. najpierw wykonujemy działania w nawiasach.
W przykładach wypowiedzi, które nie są zdaniami, było: *x dzieli się przez 3*. Nie można jej przypisać wartości logicznej, gdy nie wiemy, czym jest x. Gdy jednak w miejsce x podstawimy jakąś liczbę, to otrzymamy zdanie. Dlatego tego typu wypowiedź nazywamy *formą zdaniową*.

Definicja 1. Formą zdaniową *(lub* funkcją zdaniową*) nazywamy wypowiedź zawierająca pewną liczbę zmiennych $p, q, r, \ldots$, przy czym jeśli w miejsce zmiennych podstawimy konkretny obiekt, to otrzymamy zdanie.*

Np. formą jest: *x leży w Polsce*. Podstawiając w miejsce x "Kraków" otrzymamy zdanie prawdziwe, a podstawiając "Londyn" — zdanie fałszywe.
Obiektem może być też inne zdanie. Jeżeli dane wyrażenie zawiera zmienne zdaniowe $p, q, r, \ldots$ połączone funktorami to nazywamy je *formułą rachunku zdań*. Np. $(p \wedge q) \Rightarrow r$ jest formułą. Gdy podstawimy np. p: Kraków leży w Polsce, q: Polska leży w Europie. r: Kraków leży w Europie, to otrzymamy zdanie.
Wartość logiczna zdania otrzymanego z formy zdaniowej zależy na ogół od wartości logicznej zdań składowych. Np. formuła $(p \wedge q) \Rightarrow r$ ma wartość 1 dla $p = 0$, $q = 0$, $r = 1$, zaś wartość 0 dla $p = 1$, $q = 1$, $r = 0$. Istnieją jednak formuły rachunku zdań, które przyjmują wartość logiczną 1 przy dowolnym podstawieniu wartości logicznych za zmienne zdaniowe.

Definicja 2. *Formułę rachunku zdań, która przyjmuje wartość logiczną 1 przy dowolnym podstawieniu wartości logicznych za zmienne zdaniowe nazywamy* tautologią (prawem rachunku zdań).

Wymienimy teraz ważniejsze tautologie.
1. *Prawo wyłączonego środka (tertium non datur)*:

$$p \vee \sim p.$$

Zasada ta precyzuje, czym jest zaprzeczenie zdania. Przykładowo, zaprzeczeniem zdania *Następny sprawdzian z matematyki odbędzie się za tydzień* nie jest zdanie *Następny sprawdzian z matematyki odbędzie się za dwa tygodnie*, bo sprawdzian może się odbyć w innym terminie. Poprawnym zaprzeczeniem jest zdanie *Następny sprawdzian z matematyki nie odbędzie się za tydzień.*
2. *Prawo sprzeczności*:

$$\sim (p \wedge \sim p).$$

Oznacza to, że zdanie i jego zaprzeczenie nie mogą być jednocześnie prawdziwe.
3. *Prawa de Morgana*:

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q,$$

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q.$$

Zaprzeczenie koniunkcji jest alternatywą zaprzeczeń, zaprzeczenie alternatywy jest koniunkcją zaprzeczeń.
4. *Rozdzielność koniunkcji względem alternatywy*:

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

5. *Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji*:

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

6. *Prawo transpozycji*:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)].$$

7. *Prawo odrywania (modus ponens)*:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q.$$

Jest to jedna z podstawowych reguł wnioskowania. Jeżeli prawdziwa jest implikacja i jeżeli prawdziwy jest jej poprzednik, to prawdziwy musi być także jej następnik.
8. *Prawo sylogizmu*:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r).$$

To, czy dana forma zdaniowa jest tautologią, czy nie, można sprawdzić stosując tzw. *metodę zero-jedynkową*, tzn. podstawiając w miejsce zmiennych ich wszystkie możliwe wartości logiczne.
Przykład. . Sprawdzimy pierwsze prawo de Morgana.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1

Wiemy, że funkcja zdaniowa staje się zdaniem, gdy za zmienne występujące w niej podstawimy zdania. Innym sposobem uzyskania zdania z formy zdaniowej jest użycie *kwantyfikatorów* określających wzajemne związki między funkcją zdaniową a zakresem zmienności jej zmiennych zdaniowych.

Definicja 3. *Wyrażenie "dla każdego" nazywamy* kwantyfikatorem ogólnym (dużym) *i oznaczamy symbolem* $\forall$. *Wyrażenie "istnieje" nazywamy* kwantyfikatorem szczegółowym (małym) *i oznaczamy symbolem* $\exists$.

Np. symbol $\forall_{x>0}$ czytamy "dla każdego $x > 0$ lub "dla dowolnego $x > 0$". Forma zdaniowa $\sin x > 0$ poprzedzona tym kwantyfikatorem staje się zdaniem: $\forall_{x>0} \sin x > 0$. Jest to oczywiście zdanie fałszywe. Natomiast zdanie: $\exists_{x>0} \sin x > 0$ (istnieje takie x, że $\sin x > 0$) jest zdaniem prawdziwym.
Z określenia kwantyfikatorów wynika, że

$$\forall_{x \in X} p(x)$$

jest zdaniem prawdziwym wtedy, i tylko wtedy, gdy podstawiając do formuły $p(x)$ dowolny obiekt ze zbioru X otrzymujemy zdanie prawdziwe. Natomiast

$$\exists_{x \in X} p(x)$$

jest zdaniem prawdziwym wtedy, i tylko wtedy, gdy w zbiorze X istnieje obiekt taki, że podstawiając go do formuły $p(x)$ otrzymujemy zdanie prawdziwe.
Powyższe stwierdzenia można wykorzystać do dowodu następujących praw rachunku kwantyfikatorów.

$$\sim \forall_{x \in X} p(x) \Leftrightarrow \exists_{x \in X} \sim p(x),$$

$$\sim \exists_{x \in X} p(x) \Leftrightarrow \forall_{x \in X} \sim p(x),$$

$$\forall_{x \in X} \forall_{y \in Y} p(x, y) \Leftrightarrow \forall_{y \in Y} \forall_{x \in X} p(x, y),$$

$$\exists_{x \in X} \exists_{y \in Y} p(x, y) \Leftrightarrow \exists_{y \in Y} \exists_{x \in X} p(x, y),$$

$$\exists_{x \in X} \forall_{y \in Y} p(x, y) \Rightarrow \forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} p(x, y).$$

Zwróćmy uwagę, że ostatniej implikacji nie można odwrócić. Przykładowo, zdanie

$$\forall_y \exists_x x + y^2 < 0$$

jest prawdziwe, ale zdanie

$$\exists_x \forall_y x + y^2 < 0$$

jest fałszywe.

2. Zbiory

Pojęcie zbioru w matematyce jest tzw. pojęciem pierwotnym, a więc zbioru nie definiuje się. Zbiory oznaczamy dużymi literami $A, B, \ldots, X, Y \ldots$, a ich elementy — małymi. Zapisy $a \in A$, $a \notin A$ czytamy: a należy do A (jest elementem zbioru A) i a nie należy do A (nie jest elementem zbioru A).
Zbiór można określić wypisując jego elementy:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

lub używając formy zdaniowej $p(x)$:

$$X = \{x : p(x)\}.$$

W tym drugim przypadku X składa sie z tych elementów x dla których forma $p(x)$ staje się zdaniem prawdziwym. Np. jeśli $p(x)$ jest formą: *x jest liczbą podzielną przez 3*, to $X = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \ldots\}$.
Przypomnijmy oznaczenia: $\emptyset$ (zbiór pusty), $A \subset B$ (A jest podzbiorem B), $A \cup B$ (suma zbiorów A i B), $A \cap B$ (iloczyn lub przekrój zbiorów A i B), $A \setminus B$ (różnica zbiorów A i B). Jeśli rozpatrujemy tylko zbiory zawarte w pewnym większym zbiorze E (który w tej sytuacji nazywamy *zbiorem uniwersalnym* lub *uniwersum*, to można określić *dopełnienie zbioru A* jako $A' = E \setminus A$, czyli zbiór tych elementów $x \in E$, które nie należą do A.
Oprócz wymienionych wyżej działań na zbiorach często wykorzystuje się tzw. *iloczyn kartezjański* zbiorów:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Jest to więc zbiór wszystkich par takich, że pierwszy element należy do A, a drugi — do B.
Przykłady.
1. Jeżeli $A = [-2, 1]$ i $B = [1, 3]$, to

$$A \times B = \{(x, y) : \ -2 \leqslant x \leqslant 1, \ 1 \leqslant y \leqslant 3\}.$$

2. Jeżeli $A = \mathbb{R}$ i $B = (0, 3)$, to

$$A \times B = \{(x, y) : \ x \in \mathbb{R}, \ 0 < y < 3\}.$$

Nazwa pochodzi od francuskiego matematyka Rene Descartesa, czyli Kartezjusza. Również na jego cześć prostokątny układ współrzędnych nazywa się układem kartezjańskim.

3. Systemy matematyczne i dowodzenie twierdzeń

Definicja 4. System matematyczny *składa się*

1. *Zbioru, czyli tzw. uniwersum.*
2. *Definicji, czyli zdań, które określają znaczenie pojęć używanych w odniesieniu do uniwersum. Samego uniwersum nie definiuje się.*
3. *Aksjomatów, czyli stwierdzeń określających własności uniwersum i reguł tworzenia i dowodzenia następnych stwierdzeń.*
4. *Twierdzeń, czyli dodatkowych stwierdzeń wspomnianych wyżej.*

Przykład. W geometrii euklidesowej uniwersum składa się z punktów i prostych (tych pojęć nie definiuje się). Definiuje się np. odcinek, punkt przecięcia prostych, czy kąt miedzy prostymi. Aksjomatami są:
1. Dowolne dwa punkty można połączyć odcinkiem.
2. Dowolny odcinek można przedłużyć nieograniczenie (uzyskując prostą).
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w jednym z jego końcowych punktów i promieniu równym jego długości.
4. Wszystkie kąty proste są przystające.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony.

W danym systemie matematycznym *twierdzenie* jest to zdanie prawdziwe wyprowadzone z aksjomatów tego systemu. Prawdziwość musi być potwierdzona *dowodem*, czyli skończonym ciągiem logicznie poprawnych kroków pokazujących, że z założeń wynikają tezy twierdzenia. Wszystkie twierdzenia w matematyce mogą być wypowiedziane w postaci

Jeśli ZAŁOŻENIE, to TEZA,

lub w postaci

TEZA 1 wtedy i tylko wtedy, gdy TEZA 2.

Rzeczywiste sformułowania mogą brzmieć odmiennie, ale zawsze można sprowadzić je do powyższych postaci.
Rozważmy twierdzenia postaci *Jeśli Z, to T*. Są dwie podstawowe metody dowodzenia takich twierdzeń.
a) Dowód wprost. Zakładamy, że Z jest prawdziwe, i wnioskujemy o prawdziwości T.
b) Dowód nie wprost (przez sprowadzenie do sprzeczności). Zakładamy, że Z jest prawdziwe i T jest fałszywe, i wykazujemy, że to prowadzi do sprzeczności z założeniem lub innym twierdzeniem.
Natomiast aby udowodnić twierdzenie postaci T_1 *wtedy i tylko wtedy, gdy* T_2 wystarczy wykazać *Jeśli* T_1*, to* T_2 oraz *Jeśli* T_2*, to* T_1.
Przykład. Wykażemy twierdzenie: *Suma dowolnych dwóch liczb nieparzystych jest parzysta.* Na początek zapiszemy twierdzenie w formie implikacji:

Jeśli j i k są liczbami nieparzystymi, to $j+k$ jest liczbą parzystą.

Dowód. Jeśli j i k są nieparzyste, to istnieją liczby m, n takie, że $j = 2m+1$ oraz $k = 2n+1$. Zatem $j + k = 2m + 1 + 2n + 1 = 2(m + n + 1)$ jest liczbą parzystą.
Przykład. Wykażemy twierdzenie: $\sqrt{2}$ *jest liczbą niewymierną.* Zapiszemy twierdzenie w formie implikacji:

Jeśli x jest liczbą wymierną, to $x^2 \neq 2$.

Dowód nie wprost. Załóżmy, że x jest liczbą wymierną i $x^2 = 2$. Skoro $x \in \mathbb{Q}$, to $x = \frac{p}{q}$ dla pewnych liczb całkowitych p, q niemających wspólnego czynnika. Stąd $x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$, więc $p^2 = 2q^2$.
Zatem p^2 dzieli się przez 2, więc p musi być podzielne przez 2, tj, $p = 2r$ dla pewnego całkowitego r. Stąd $4r^2 = p^2 = 2q^2$, czyli $q^2 = 2r^2$. Wnioskujemy, że q musi być liczbą parzystą. A więc obie liczby p, q są parzyste. Sprzeczność, bo zakładaliśmy, że p, q nie mają wspólnego czynnika.
Oprócz omówionych podstawowych metod dowodzenia istnieją inne. W przypadku twierdzeń o liczbach naturalnych mamy do dyspozycji *zasadę indukcji*, którą teraz opiszemy.

4. Indukcja matematyczna

Zasada indukcji matematycznej jest ścisłą formą popularnej zasady domina. Jeżeli klocki domina ustawimy jeden obok drugiego tak, by pojedynczy klocek przewracając się obalił następny, to przewrócenie pierwszego klocka spowoduje upadek wszystkich.

Twierdzenie 1. (zasada indukcji matematycznej) *Niech $T(n)$ oznacza twierdzenie dotyczące liczb naturalnych. Jeżeli*
1. *jest ono prawdziwe dla pewnej liczby n_0,*
2. *dla każdej liczby $k \geqslant n_0$ z prawdziwości twierdzenia dla k wynika jego prawdziwość dla liczby $k+1$,*

to twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych większych bądź równych n_0.

Dowód. Dowód twierdzenia o indukcji wykorzystuje *zasadę minimum*:

Każdy niepusty zbiór liczb naturalnych zawiera element najmniejszy.

Załóżmy, że twierdzenie $T(n)$ nie jest prawdziwe dla wszystkich $n \geqslant n_0$. Niech A oznacza zbiór wszystkich $n \geqslant n_0$ dla których $T(n)$ nie jest prawdziwe, i niech a będzie najmniejszym elementem zbioru A. Liczba a musi być większa od n_0 (z warunku 1), więc $a - 1 \geqslant n_0$ oraz $T(a-1)$ jest prawdziwe. Wtedy jednak z warunku 2 wnioskujemy, że $T(a)$ jest prawdziwe, sprzeczność.
Przykład. Korzystając z zasady indukcji udowodnimy następujące twierdzenie:
Dla każdej liczby naturalnej n liczba $7^n - 1$ jest podzielna przez 6.
D o w ó d. Sprawdzamy dwa kroki zasady indukcji:
1. Dla $n = 1$: $7^1 - 1 = 6$ jest oczywiście podzielne przez 6.
2. Zakładamy, że dla liczby naturalnej k liczba $7^k - 1$ jest podzielna przez 6. Wówczas liczba

$$7^{k+1} - 1 = (6+1)7^k - 1 = 6 \cdot 7^k - 7^k - 1$$

też jest podzielna przez 6, bo składnik $6 \cdot 7^k$ ma czynnik 6, a składnik $7^k - 1$ dzieli się przez 6 na mocy założenia indukcyjnego. Czyli warunki 1 i 2 są spełnione. Zatem, na mocy zasady indukcji liczba $7^n - 1$ dzieli się przez 6 dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
Uwaga. W naukach empirycznych słowo indukcja może mieć mniej ścisłe znaczenie. Np. wyniki doświadczenia wespół z pewnym tokiem rozumowania uprawniają do przyjęcia prawdziwości tezy, która może okazać się nieprawdziwa, gdy wyjdą na jaw inne fakty.
Jako ilustracja dowcip z serii "Matematyk i ..." ze strony:
`http://www.math.utah.edu/~cherk/mathjokes.html#topic3`

A mathematician, a physicist, and an engineer were traveling through Scotland when they saw a black sheep through the window of the train.
"Aha," says the engineer, "I see that Scottish sheep are black."
"Hmm," says the physicist, "You mean that some Scottish sheep are black."
"No," says the mathematician, "All we know is that there is at least one sheep in Scotland, and that at least one side of that one sheep is black!"

Metodą indukcji udowodnić następujące twierdzenia.

1. $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$

2. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

3. Udowodnić, że liczba $n^3 - n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ jest podzielna przez 6. (łatwo bez indukcji)

4. Udowodnić, że liczba $8^n + 6$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ jest podzielna przez 7.

5. Udowodnić, że liczba $n^3 + 2n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ jest podzielna przez 3.

6. Udowodnić, że liczba $3^{4n+2} + 1$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ jest podzielna przez 10.

7. Nierówność Bernoullego: $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ dla $n \in \mathbb{N}$, $x \geqslant -1$.

8. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + > \sqrt{n}$ dla $n > 1$.

9. $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$ dla $n > 6$.

10. Wykazać, że liczba przekątnych n-kąta wypukłego jest równa $a_n = \frac{1}{2}n(n-3)$.

11. Korzystając z poprzedniego twierdzenia wykazać, że liczba trójkątów, które można utworzyć z n-kąta wypukłego jest równa $b_n = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$.

11. Ciąg (x_n) jest określony rekurencyjnie: $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że ciąg ten jest rosnący i ograniczony z góry przez 2.

12. Udowodnić wzór dwumianowy Newtona

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$