1 Zbiór liczb rzeczywistych

Pojęcie liczby zmieniało się w czasie. Najpierw były liczby naturalne: $1, 2, 3, \ldots$, potem ułamki, czyli liczby wymierne. W czasach Pitagorasa pojawiły się liczby niewymierne takie jak np. $\sqrt{2}$, a znacznie później liczby ujemne i liczba 0 (dopiero w VIII wieku). Wszystkie te liczby obejmujemy wspólną nazwą liczb rzeczywistych.
Będziemy stosować następujące oznaczenia:

- $\mathbb{N}$ — zbiór liczb naturalnych;
- $\mathbb{Z}$ — zbiór liczb całkowitych;
- $\mathbb{Q}$ — zbiór liczb wymiernych;
- $\mathbb{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych.

Podkreślamy, że 0 nie jest liczbą naturalną. Liczba π wyrażająca stosunek długości okręgu do jego średnicy jest niewymierna. Inną ważną liczbą niewymierną jest

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718\ldots.$$

nazywana też *liczbą Eulera*[1].
Każda liczba niewymierna ma nieskończone rozwinięcie dziesiętne. Jest to warunek konieczny niewymierności liczby. Nie jest on jednak dostateczny, bo liczby wymierne (a nawet naturalne!) też mogą mieć nieskończone rozwinięcia dziesiętne, np. $\frac{1}{3} = 0,(3)$, $1 = 0,(9)$. (w tym zapisie nawias oznacza, że cyfra powtarza się nieskończenie wiele razy)
Pojęcia definiowane dalej odnoszą się do zbiorów będących podzbiorami liczb rzeczywistych.

1.1 Zbiory ograniczone

Definicja 1 *Zbiór X jest* ograniczony z dołu*, gdy istnieje taka liczba m, że $\forall_{x\in X} x \geqslant m$. Analogicznie, X jest* ograniczony z góry*, gdy istnieje taka liczba M, że $\forall_{x\in X} x \leqslant m$. Liczby m, M nazywamy ograniczeniem dolnym i ograniczeniem górnym zbioru X.*

Przykłady
1. Zbiór $A = \{1, 5, 9, 13, \ldots\}$ jest ograniczony z dołu (ograniczeniem jest liczba 1, lub dowolna liczba mniejsza od 1), nie jest natomiast ograniczony z góry.
2. Przedział $B = (-\infty, 2)$ nie jest ograniczony z dołu, ale jest ograniczony z góry (liczbą 2 lub liczbą większą od 2).
3. Zbiór $D = \{\sqrt[n]{7} : n \in \mathbb{N}\}$ jest ograniczony z dołu (można wykazać, że wszystkie pierwiastki sa większe od 1), i z góry (łatwo wykazać, że wszystkie pierwiastki sa mniejsze od 7).

[1] Więcej informacji w rozdziale o ciągach.

1.2 Kresy zbiorów

Jak widzieliśmy, ograniczenia zbiorów (jeśli w ogóle istnieją) nie są wyznaczone jednoznacznie. Dość naturalne jest żądanie, by podać najmniejsze ograniczenie górne i największe ograniczenie dolne.

Definicja 2 Kresem dolnym *zbioru* X *ograniczonego z dołu nazywamy największą liczbę* a *ograniczającą ten zbiór z dołu. Symbolicznie warunek ten możemy zapisać następująco:*

$$\forall_{x\in X}\ x \geqslant a \quad \wedge \quad \forall_{\epsilon>0}\exists_{x_0\in X}\ x_0 < a+\epsilon.$$

Piszemy: $a = \inf X$*. Dla zbioru nieograniczonego* $\inf X = -\infty$*.*

Definicja 3 Kresem górnym *zbioru* X *ograniczonego z góry nazywamy najmniejszą liczbę* b *ograniczającą ten zbiór z góry. Symbolicznie warunek ten możemy zapisać następująco:*

$$\forall_{x\in X}\ x \leqslant b \quad \wedge \quad \forall_{\epsilon>0}\exists_{x_0\in X}\ x_0 > b-\epsilon.$$

Piszemy: $b = \sup X$*. Dla zbioru nieograniczonego* $\sup X = \infty$*.*

Przykłady (patrz przykłady wyżej)
1. Zbiór $A = \{1, 5, 9, 13, \ldots\}$ ma kres dolny 1, a nie ma kresu górnego: $\inf A = 1$, $\sup A = \infty$.
2. Przedział $B = (-\infty, 2)$ nie ma kresu dolnego, a kresem górnym jest 2: $\inf B = -\infty$, $\sup B = 2$.
3. Dla zbioru $D = \{\sqrt[n]{7} : n \in \mathbb{N}\}$ mamy: $\inf D = 1$, $\sup D = 7$.
Zwróćmy uwagę, że kres może (lecz nie musi!) być elementem danego zbioru. W przykładzie 1 $\inf A = 1 \in A$, w przykładzie 2 $\sup B = 2 \notin B$, w przykładzie 3 $\inf D = 1 \notin D$, $\sup D = 7 = \sqrt[1]{7} \in D$. Zauważmy też, że kres dolny (odp.: górny) jest elementem danego zbioru, gdy w tym zbiorze istnieje *element najmniejszy* (odp.: *największy*). Pojęcie kresu jest wygodniejsze od pojęcia elementu najmniejszego, czy największego, bo te elementy nie zawsze istnieją, a kresy — tak.

2 Funkcje — podstawowe pojęcia

Definicja 4 Funkcją *określoną na zbiorze* X *o wartościach w zbiorze* Y *nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi* $x \in X$ *dokładnie jednego elementu* $y \in Y$*. Piszemy np.* $f : X \longrightarrow Y$*. Wartość funkcji* f *w punkcie* x *oznaczamy* $f(x)$*.*

Funkcja jest więc zbiorem par liczb postaci $(x, f(x))$, a więc jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$. Zaznaczając te pary jako punkty w układzie współrzędnych Oxy otrzymujemy *wykres funkcji*. Zbiór X nazywamy *dziedziną funkcji* (ozn. D_f), a Y — *przeciwdziedziną*. Z kolei zbiór

$$\{f(x) \in Y \ :\ x \in D_f\}$$

nazywamy *zbiorem wartości funkcji*.
Wymienimy teraz ważniejsze typy funkcji.

Funkcję $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *okresową*, gdy

$$\exists_{T>0}\forall_{x\in X}\ x \pm T \in X \,\mathrm{oraz}\, f(x+T) = f(x).$$

Warunek ten geometrycznie oznacza, że wykres funkcji nie zmienia się po przesunięciu o wektor $\vec{v} = (T, 0)$. Liczbę T nazywamy okresem funkcji. Okres nie jest wyznaczony jednoznacznie, bo jeśli T jest okresem funkcji f, to każda liczba $\pm 2T, \pm 3T, \dots$ jest też okresem. Najchętniej posługujemy się okresem minimalnym, np. dla funkcji $\sin x, \cos x$ jest to 2π, a dla funkcji $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ — liczba π. Jednak okres minimalny nie musi istnieć — każda funkcja stała $f(x) = c$ jest funkcją okresową, a okresem jest dowolna liczba! Innym przykładem funkcji okresowej bez okresu minimalnego jest *funkcja Dirichleta*:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Okresem tej funkcji jest każda liczba wymierna.
Funkcję $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *parzystą*, gdy

$$\forall_{x\in X}\ -x \in X \,\mathrm{oraz}\, f(-x) = f(x).$$

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi Oy.
Funkcję $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *nieparzystą*, gdy

$$\forall_{x\in X}\ -x \in X \,\mathrm{oraz}\, f(-x) = -f(x).$$

Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.
Nazwy biorą się stąd, że wśród wielomianów funkcjami parzystymi są te, które mają wykładniki parzyste, np. $x^2, x^4 - 7x^2$. Z kolei nieparzyste to np. $2x^3 + 4x$. Funkcjami nieparzystymi sa też $\sin x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{tg} x$, natomiast $\cos x$ jest funkcją parzystą.
Jeżeli zbiór wartości funkcji jest ograniczony, to funkcję nazywamy *ograniczoną*. Ta własność istotnie zależy od dziedziny funkcji. Np. funkcja $\operatorname{tg} x$ rozpatrywana w przedziale $[-\pi/4, \pi/4]$ jest ograniczona (zbiorem wartości jest przedział $[-1, 1]$), a w przedziale $(-\pi/2, \pi/2)$ jest nieograniczona (zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, \infty)$).
Na koniec przypomnimy pojęcie *funkcji monotonicznej*. Ta nazwa obejmuje funkcje *rosnące, malejące, nierosnące i niemalejące*.
Funkcja f jest *rosnąca* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\forall_{x_1,x_2\in A}\ (x_1 < x_2) \Longrightarrow (f(x_1) < f(x_2)).$$

Funkcja f jest *malejąca* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\forall_{x_1,x_2\in A}\ (x_1 < x_2) \Longrightarrow (f(x_1) > f(x_2)).$$

Funkcja f jest *niemalejąca* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\forall_{x_1,x_2\in A}\ (x_1 < x_2) \Longrightarrow (f(x_1) \leqslant f(x_2)).$$

Funkcja f jest *nierosnąca* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\forall_{x_1,x_2\in A}\ (x_1 < x_2) \Longrightarrow (f(x_1) \geqslant f(x_2)).$$

Monotoniczność funkcji stwierdzamy badając znak różnicy $f(x_2) - f(x_1)$ przy założeniu, że $x_2 > x_1$. Jeśli jest on stały, to funkcja jest monotoniczna. Rodzaj znaku ($> 0, < 0, \geqslant 0, \leqslant 0$) wyjaśnia jaki jest typ monotoniczności.

2.1 Funkcje złożone

Definicja 5 *Niech* $f : X \to Y$, $g : Z \to W$, *przy czym* $Y \subset Z$. *Wtedy funkcję*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad dla x \in X$$

nazywamy złożeniem *funkcji* f *i* g.

Funkcję $g \circ f$ nazywamy funkcją złożoną; funkcje f nazywamy wewnętrzną, funkcję g zewnętrzną.
Jak widać, złożenie istnieje tylko wtedy, gdy każda wartość funkcji wewnętrznej należy do dziedziny funkcji zewnętrznej (przykład 3 niżej).
Składanie funkcji jest nieprzemienne, tzn. na ogół $g \circ f$ jest czym innym niż $f \circ g$.[2]
Przykłady
1. Niech $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$. Wtedy $(g \circ f)(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$, a $(f \circ g)(x) = x$ dla $x \geqslant 0$.
2. Niech $f(x) = \sin x$, $g(x) = 3^x$. Wtedy $(g \circ f)(x) = 3^{\sin x}$ dla $x \in \mathbb{R}$, a $(f \circ g)(x) = \sin(3^x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.
3. Niech $f(x) = -x^2$, $g(x) = \log x$. Wtedy $(g \circ f)(x)$ nie istnieje, a $(f \circ g)(x) = -(\log x)^2$ dla $x > 0$.

2.2 Funkcje odwrotne

Definicja 6 *Funkcja* f *jest* różnowartościowa *na zbiorze* $A \subset D_f$, *jeżeli*

$$\forall_{x_1, x_2 \in A}\ (x_1 \neq x_2) \Longrightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Znaczy to, że różnym wartościom argumentu odpowiadają różne wartości funkcji.
Implikację powyższą można przekształcić korzystając z prawa transpozycji (patrz s.**??**):

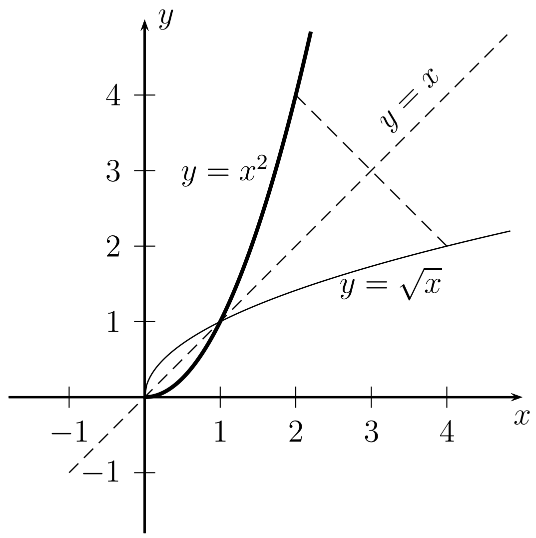
$$\forall_{x_1, x_2 \in A}\ (f(x_1) = f(x_2)) \Longrightarrow (x_1 = x_2).$$

Warunek zapisany w tej postaci jest łatwiejszy do sprawdzenia.
Przykład Wykażemy, że funkcja $f(x) = 2x^3 + x + 3$ jest różnowartościowa. Zakładamy, że $f(x_1) = f(x_2)$, czyli

$$2x_1^3 + x_1 + 3 = 2x_2^3 + x_2 + 3,$$
$$2x_1^3 - 2x_2^3 + x_1 - x_2 = 0,$$
$$2(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (x_1 - x_2) = 0,$$
$$(x_1 - x_2)(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 1) = 0.$$

Ale $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 1 = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 1 > 0$, więc musi być $x_1 - x_2 = 0$, czyli $x_1 = x_2$.
O funkcjach różnowartościowych mówimy też, że są *wzajemnie jednoznaczne* lub *jedno-jednoznaczne*.

[2] To tak jak z zakładaniem skarpetek i butów — kolejność jest ważna.



Rysunek 1: Wykresy funkcji wzajemnie odwrotnych

Definicja 7 *Niech funkcja $f : X \longrightarrow Y$ będzie różnowartościowa na X i niech jej zbiorem wartości będzie cały zbiór Y. Funkcję $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ określoną warunkiem:*

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

nazywamy funkcją odwrotną *do funkcji f.*

Zwyczajowo zamieniamy zmienne miejscami; chodzi o to, żeby argumentem był x, a wartością y. Skutkiem tej zamiany jest symetria wykresów funkcji wzajemnie odwrotnych. Pokazujemy to na przykładzie funkcji $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$.

Przykład Znaleźć funkcję odwrotną do danej:

1. $y = \frac{1}{2^x+1}$

Ta funkcja jest różnowartościowa dla $x \in \mathbb{R}$ i jej zbiorem wartości jest $(0, 1)$. Aby znaleźć odwrotną traktujemy wzór określający funkcję jak równanie z niewiadomą x. Mamy zatem:

$$y(2^x + 1) = 1,$$

$$2^x + 1 = \frac{1}{y},$$

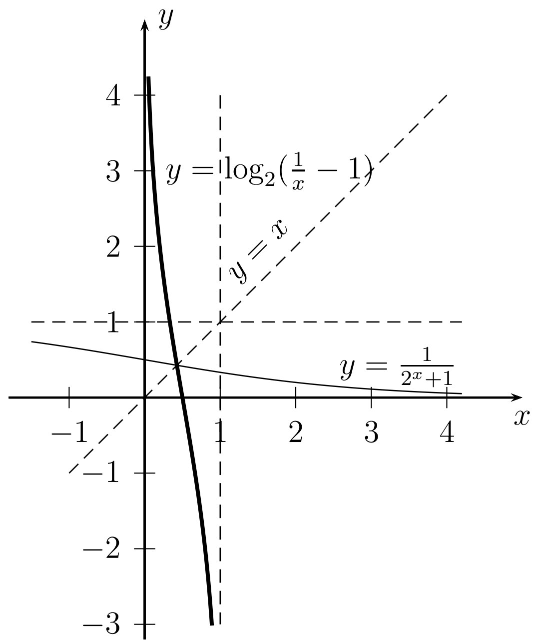
$$2^x = \frac{1}{y} - 1,$$

$$x = \log_2(\frac{1}{y} - 1).$$

Zamieniamy x z y:

$$y = \log_2(\frac{1}{x} - 1).$$

Jest to funkcja $(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$. Jej wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $y = \frac{1}{2^x+1}$ względem prostej $y = x$.



Rysunek 2: Wykresy funkcji z przykładu 1

2. $y = \frac{2x+1}{3x-1}$
Dziedziną jest $(-\infty, 1/3) \cup (1/3, \infty)$, zbiorem wartości $(-\infty, 2/3) \cup (2/3, \infty)$. Wyliczamy x:

$$y(3x-1) = 2x+1,$$
$$3xy - 2x = y + 1,$$
$$x(3y-2) = y+1,$$
$$x = \frac{y+1}{3y-2}.$$

Po zamianie x z y:

$$y = \frac{x+1}{3x-2}.$$

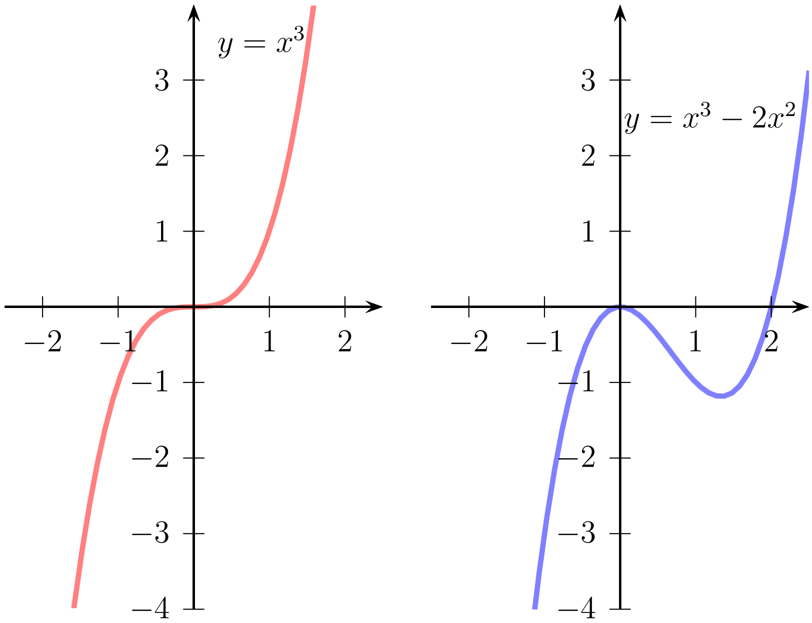
Jest to funkcja $(-\infty, 2/3) \cup (2/3, \infty) \longrightarrow (-\infty, 1/3) \cup (1/3, \infty)$. Wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $y = \frac{2x+1}{3x-1}$ względem prostej $y = x$.

3 Funkcje wielomianowe

Definicja 8 Funkcją wielomianową *(krócej:* wielomianem*) nazywamy funkcję określoną wzorem:*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Liczby a_k, gdzie $k = 0, 1, \ldots n$ nazywamy współczynnikami wielomianu. Liczbę n nazywamy stopniem wielomianu. Jeżeli jest tylko jeden współczynnik niezerowy, to wielomian nazywamy jednomianem. Analogicznie używamy nazw: dwumian, trójmian.
Dziedziną naturalną funkcji wielomianowej jest cały zbiór $\mathbb{R}$.

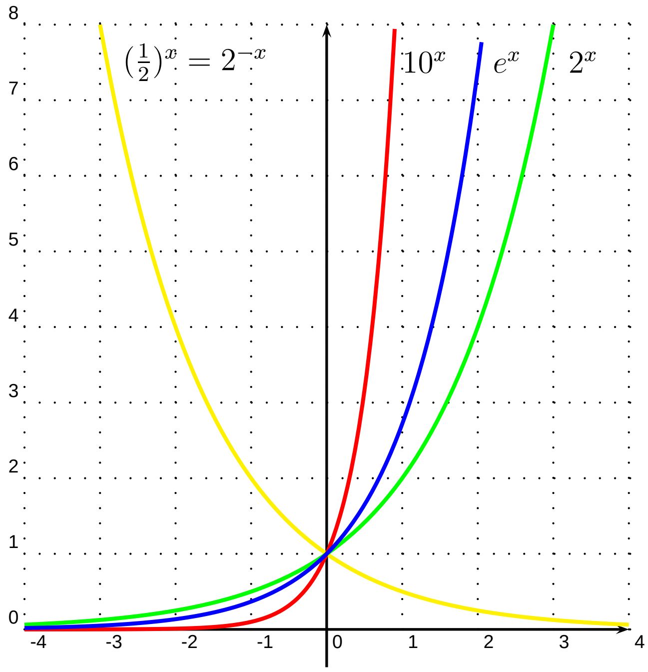


Rysunek 3: Wykresy przykładowych wielomianów

4 Funkcje wykładnicze

Definicja 9 Funkcją wykładniczą *nazywamy funkcję określoną wzorem:*

$$f(x) = a^x, \quad \text{gdzie } a > 0, a \neq 1$$



Rysunek 4: Wykresy niektórych funkcji wykładniczych

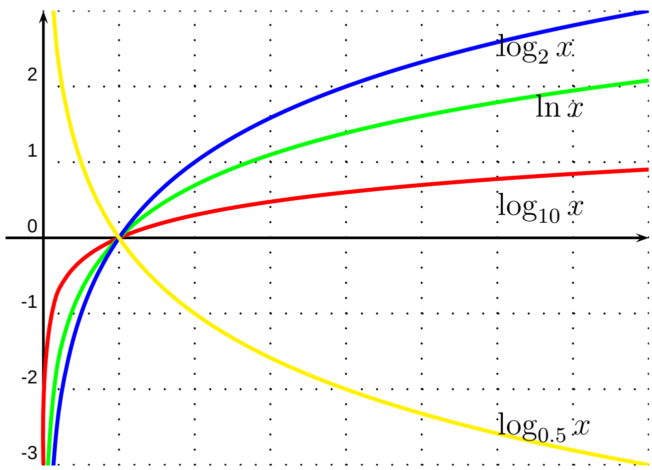
Dziedziną naturalną funkcji wykładniczej jest cały zbiór $\mathbb{R}$.
Funkcja wykładnicza jest rosnąca gdy podstawa a jest większa od 1, a malejąca gdy a jest mniejsza od 1.

5 Funkcje logarytmiczne

Definicja 10 Funkcją logarytmiczną *nazywamy funkcję określoną wzorem:*

$$f(x) = \log_a x, \quad \text{gdzie } a > 0, a \neq 1$$

Naturalną dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R}_+$ liczb większych od zera.
Funkcja logarytmiczna jest rosnąca gdy podstawa a jest większa od 1, a malejąca gdy a jest mniejsza od 1.



Rysunek 5: Wykresy niektórych funkcji logarytmicznych

6 Funkcje trygonometryczne

Przyjmujemy, że Czytelnik zna określenia funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, i ogólniej: kąta skierowanego (kąt jest mierzony w stopniach).
Podamy teraz określenia **funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej**. Zaczniemy od wprowadzenia innej niż stopnie miary kąta.

Definicja 11 *Niech będzie dany dowolny kąt. Z jego wierzchołka zataczamy okrąg o dowolnym promieniu r. Niech l oznacza łuk będący częścią wspólną tego okręgu i obszaru danego kąta. Stosunek długości tego łuku do promienia nazywamy* łukową miarą kąta. *Zatem*

$$\text{łukowa miara kąta } = \frac{l}{r}.$$

Zauważmy, że przy zmianie promienia r zmienia się proporcjonalnie łuk l, zatem stosunek jest zawsze taki sam.

Jeżeli łukowa miara kąta jest równa 1, to kąt nazywamy *radianem.* Inaczej, radian jest miarą kąta w którym łuk jest równy promieniowi.
Przykłady 1. Miarą łukową kąta pełnego jest 2π, bo łuk zatoczony promieniem r ma wtedy długość $2\pi r$.
2. Kąt półpełny ma miarę π.
Każdy nieco lepszy kalkulator pozwala na przeliczenie miary łukowej na stopniową, i odwrotnie. Zasada zamiany jednej miary na drugą jest prosta. Jeśli miarę łukową danego kąta oznaczymy przez φ, a kątową: φ°, to zachodzi proporcja

$$\varphi : \pi = \varphi^\circ : 180^\circ,$$

czyli

$$\varphi^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi$$

oraz

$$\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \varphi^\circ.$$

Przykłady 1. Jaka jest miara łukowa kąta 43°?

$$\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 43^\circ = 0,7505.$$

2. Wyrazić 1 radian w stopniach.

$$\varphi^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 1 = 57,2958^\circ.$$

Cyfry po przecinku oznaczają $\frac{2958}{10000}^\circ$.
Zwykle stopień dzielimy na minuty, a te — na sekundy. Zatem

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 45''$$

Poniższa tabelka pokazuje miary łukowe kątów podanych w stopniach.

Stopnie	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radiany	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Od tej pory przyjmujemy, że funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej to **funkcje łukowej miary kąta**.

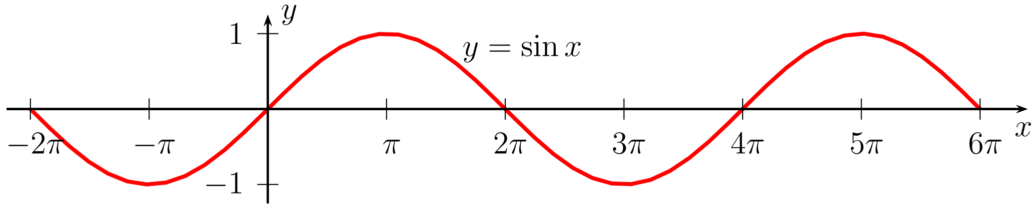
Definicja 12 *Sinusem liczby x nazywamy sinus kąta skierowanego, którego miarą łukową jest x.*

Analogicznie określamy pozostałe funkcje trygonometryczne.
Znane własności funkcji trygonometrycznych należy teraz wysłowić inaczej. Oto przykłady.
Okresem podstawowym funkcji $\sin x$ jest liczba 2π. Zatem $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ dla dowolnej liczby całkowitej k. Analogicznie jest dla cosinusa.
Okresem podstawowym funkcji $\operatorname{tg} x$ jest liczba π. Zatem $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$ dla dowolnej liczby całkowitej k. Analogicznie jest dla cotangensa.
Funkcje $\sin x$ i $\cos x$ są określone w przedziale $(-\infty, +\infty)$.

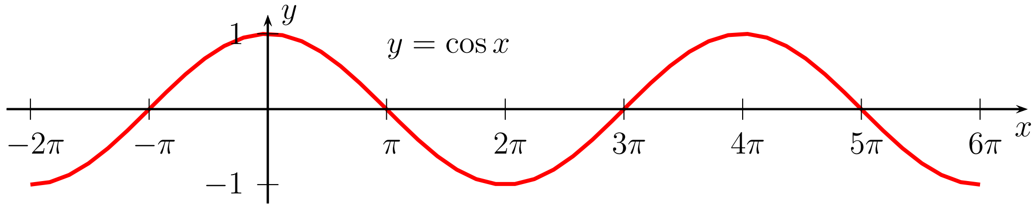
Funkcja $\operatorname{tg} x$ jest określona w każdym przedziale postaci $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, gdzie $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
Funkcja $\operatorname{ctg} x$ jest określona w każdym przedziale postaci $(k\pi, (k+1)\pi)$, gdzie $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
Sinus jest funkcja nieparzystą, tzn. $\sin(-x) = -\sin x$. Cosinus jest funkcja parzystą, tzn. $\cos(-x) = \cos x$.
Funkcje tangens i cotangens są nieparzyste.
Poniższa tabelka zawiera wartości funkcji trygonometrycznych, które **należy znać na pamięć**. Symbol X oznacza, że wartość nie istnieje.

Kąt	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X
$\operatorname{ctg} x$	X	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

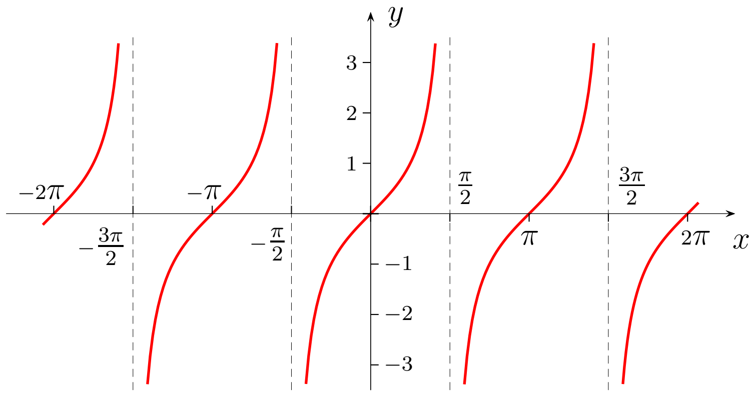
Wartości funkcji trygonometrycznych dla innych kątów znajdujemy korzystając z tzw. *wzorów redukcyjnych*. Oto niektóre z nich.
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{ctg} x$
Ogólne zasady są takie: jeżeli we wzorze występuje kąt $\frac{\pi}{2}$ lub $\frac{3\pi}{2}$, to funkcja zmienia się na kofunkcję; jeżeli we wzorze występuje kąt π lub 2π, to funkcja pozostaje bez zmian. Natomiast znak po prawej stronie ustalamy posługując się wiedzą o znakach funkcji w poszczególnych ćwiartkach (każdy powinien znać wierszyk: *w pierwszej wszystkie są dodatnie, w drugiej tylko sinus, w trzeciej tanges i cotangens, a w czwartej cosinus*).



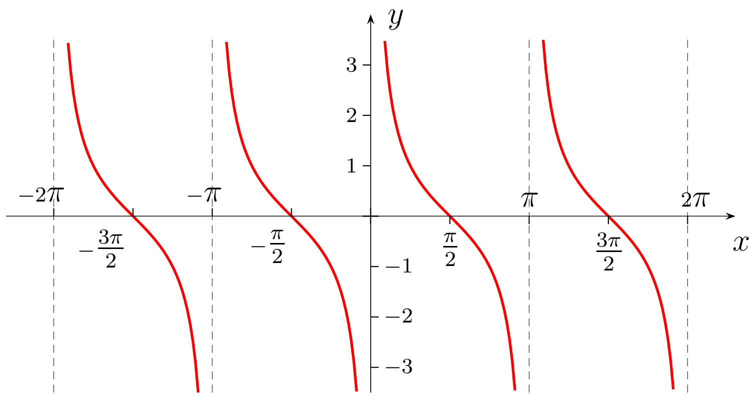
Rysunek 6: Wykres funkcji sinus.



Rysunek 7: Wykres funkcji cosinus.



Rysunek 8: Wykres funkcji tangens.



Rysunek 9: Wykres funkcji cotangens.

Jak wiadomo, $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$. Zatem tam, gdzie tangens wynosi 0, cotangens nie istnieje (występują asymptoty pionowe), i na odwrót.

7 Funkcje cyklometryczne

Funkcje trygonometryczne nie są wprawdzie różnowartościowe na całej swojej dziedzinie, ale dla każdej z nich można łatwo znaleźć przedział na którym są różnowartościowe, i wtedy można określić funkcję odwrotną.

Definicja 13 *Rozpatrzmy funkcję* $\sin x : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$. *Funkcję odwrotną do niej nazywamy funkcją* $\arcsin x$. *Zatem:*

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y \wedge x \in [-1, 1] \wedge y \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Definicja 14 *Rozpatrzmy funkcję* $\cos x : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$. *Funkcję odwrotną do niej nazywamy funkcją* $\arccos x$. *Zatem:*

$$y = \arccos x \iff x = \cos y \wedge x \in [-1, 1] \wedge y \in [0, \pi].$$

Definicja 15 *Rozpatrzmy funkcję* $\operatorname{tg} x : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow (-\infty, \infty)$. *Funkcję odwrotną do niej nazywamy funkcją* $\operatorname{arc\,tg} x$. *Zatem:*

$$y = \operatorname{arc\,tg} x \iff x = \operatorname{tg} y \wedge x \in (-\infty, \infty) \wedge y \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Definicja 16 *Rozpatrzmy funkcję* $\operatorname{ctg} x : (0, \pi) \longrightarrow (-\infty, \infty)$. *Funkcję odwrotną do niej nazywamy funkcją* $\operatorname{arc\,ctg} x$. *Zatem:*

$$y = \operatorname{arc\,ctg} x \iff x = \operatorname{ctg} y \wedge x \in (-\infty, \infty) \wedge y \in (0, \pi).$$

Te cztery funkcje obejmujemy wspólną nazwą *funkcji cyklometrycznych*. Skrót *arc* w nazwach tych funkcji oznacza *łuk*, bo każda z tych funkcji przyporządkowuje liczbie będącej wartością funkcji trygonometrycznej miarę łukową odpowiedniego kąta.
Ważne jest, by pamiętać dziedziny i przedziały wartości funkcji cyklometrycznych. Np. funkcja $y = \sin x$ posiada funkcje odwrotne w rozmaitych przedziałach, ale tylko dla przedziału $[-\pi/2, \pi/2]$ używamy oznaczenia $\arcsin x$.
Istnieje wiele tożsamości dla funkcji trygonometrycznych, a z nich wynikają tożsamości dla funkcji cyklometrycznych.
Przykład Wykazać, że

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

D o w ó d. Oznaczmy $u = \arcsin x$, $v = \arccos x$. Zatem $x \in [-1, 1]$, $u \in [-\pi/2, \pi/2]$, $v \in [0, \pi]$. Ponadto:

$$x = \sin u, \quad x = \cos v,$$

oraz ze wzoru redukcyjnego:

$$\sin u = \cos(\pi/2 - u).$$

Zatem

$$\cos(\pi/2 - u) = \cos v.$$

Ale zarówno $\pi/2 - u$ jak i v należą do przedziału $[0, \pi]$, w którym funkcja $\cos x$ jest różnowartościowa. Stąd wynika, że argumenty muszą być równe: $\pi/2 - u = v$, więc $u + v = \pi/2$, czyli:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Przykład Obliczyć $\arcsin \sqrt{3}/2$.
Niech $x = \arcsin \sqrt{3}/2$. Wtedy z definicji $\sin x = \sqrt{3}/2$ oraz $x \in [\pi/2, \pi/2]$. Zatem $x = \pi/3$.
Przykład Wykazać, że $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ dla $|x| \leqslant 1$.
Oznaczmy $\arcsin x = y$. Wtedy $\sin y = x$, $y \in [\pi/2, \pi/2]$ oraz

$$\cos(\arcsin x) = \cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Ale znak minus jest wykluczony, bo $\cos x \geqslant 0$ w $[\pi/2, \pi/2]$. Zatem

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

8 Funkcje elementarne

Podstawowymi funkcjami elementarnymi nazywamy funkcje stałe, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne i cyklometryczne. Natomiast funkcje, które można otrzymać z podstawowych funkcji elementarnych za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych oraz operacji złożenia funkcji nazywamy *funkcjami elementarnymi.* W szczególności są to: wartość bezwzględna, wielomiany, funkcje wymierne.
Funkcjami elementarnymi są również tzw. *funkcje hiperboliczne* zdefiniowane następująco.

Definicja 17 Sinusem hiperbolicznym*, oznaczanym* $\sinh x$ *nazywamy funkcję:*

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Definicja 18 Cosinusem hiperbolicznym*, oznaczanym* $\cosh x$ *nazywamy funkcję:*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Definicja 19 Tangensem hiperbolicznym*, oznaczanym* $\operatorname{tgh} x$ *nazywamy funkcję:*

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Definicja 20 Cotagensem hiperbolicznym*, oznaczanym* $\operatorname{ctgh} x$ *nazywamy funkcję:*

$$\operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

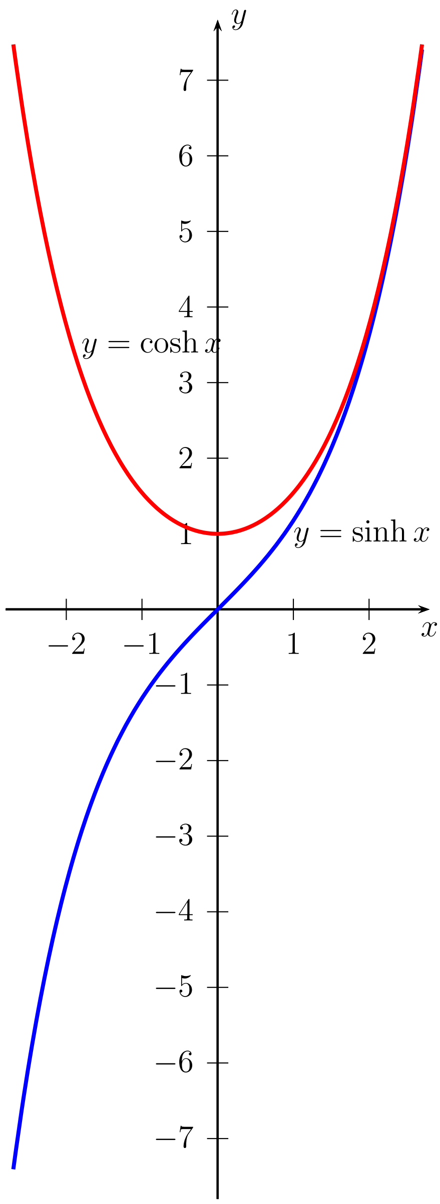
Dla funkcji hiperbolicznych istnieją tożsamości przypominające te dla funkcji trygonometrycznych. Przykładowo:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x,$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

Tożsamości te łatwo sprawdzić rachunkowo.



Rysunek 10: Wykresy sinusa i cosinusa hiperbolicznego

Łatwo sprawdzić także, że sinus hiperboliczny jest funkcją nieparzystą, a cosinus hiperboliczny parzystą.
Oprócz powyżej wymienionych, będziemy posługiwać się dwiema funkcjami nieelementarnymi:
1. Funkcja *część całkowita* przyporządkowująca liczbie x największą liczbę całkowitą niewiększą niż x:

$$[x] = k \quad \text{dla} \quad k \leqslant x < k+1, \quad \text{gdzie} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Np. $[\frac{2}{3}] = 0$, $[3{,}23] = 3$, $[-4{,}56] = -5$, $[\sqrt{2}] = 1$.

2. Funkcja *signum* (znak), oznaczana $\operatorname{sgn} x$, i zdefiniowana następująco:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad x < 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \\ 1 & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$